质点运动学(2)

主要内容：

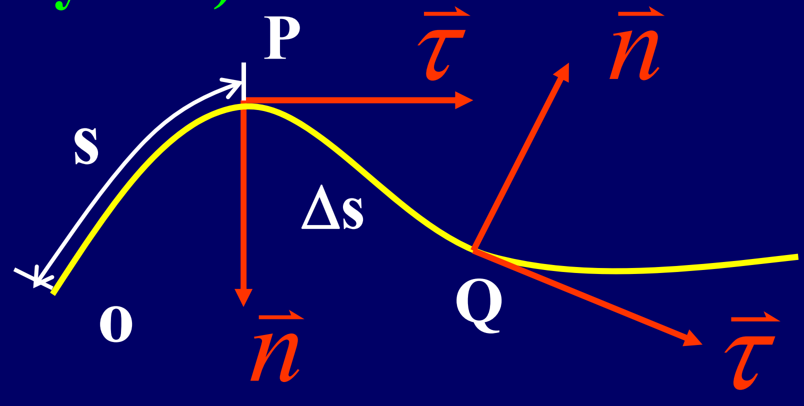
- 自然坐标系中的速度和加速度
- 不同坐标系中速度和加速度的变换关系

§1-3 自然坐标系中的速度和加速度

1. 自然坐标系(natural coordinate system)

以轨迹上任 一点o作为坐标的原点，轨迹曲线为坐标轴建立的坐标系称为自然坐标系。

坐标轴的方向分别取切线和法线两正交方向。



规定：切向坐标轴沿质点前进方向的切向为正，单位矢量为 $\vec{\tau}$

法向坐标轴沿轨迹的法向凹侧为正，单位矢量为 $\vec{n}$

注意：在自然坐标系中,单位矢量的方向随时间变化.

2. 速度和速率

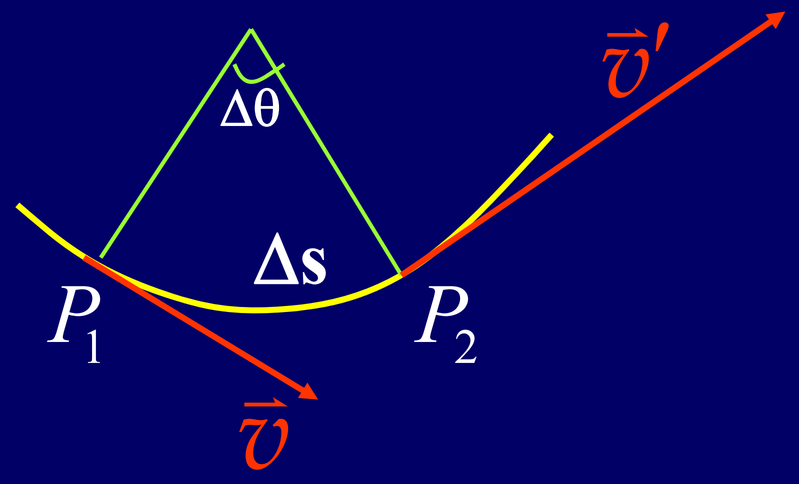
速度：$\boxed{\vec{v} = \dfrac{ds}{dt}\vec{\tau}}$　　速率：$\boxed{v = \dfrac{ds}{dt}}$

3．法向加速度和切向加速度

设：一质点作一般曲线运动，

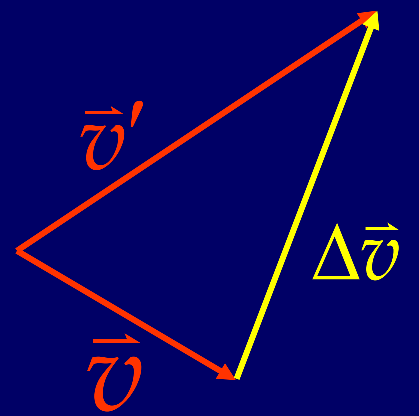
t时刻位于 P_1点，速度为 $\vec{v}$

经过 Δt 时间位于 P_2 点，速度为 $\vec{v}'$



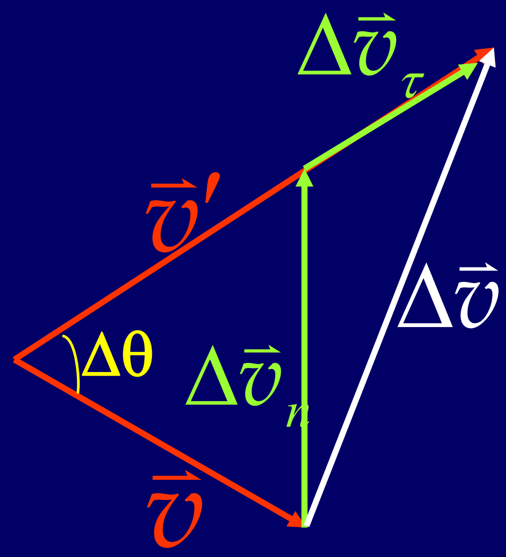
速度增量：$\Delta\vec{v} = \vec{v}' - \vec{v}$

平均加速度：$$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$



瞬时加速度：$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_\tau + \Delta\vec{v}_n$$



加速度：

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t}$$

右边第一项称为切向加速度，用$\vec{a}_\tau$表示

$$\vec{a}_\tau = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}\vec{\tau} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}$$

$$\boxed{\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}}$$

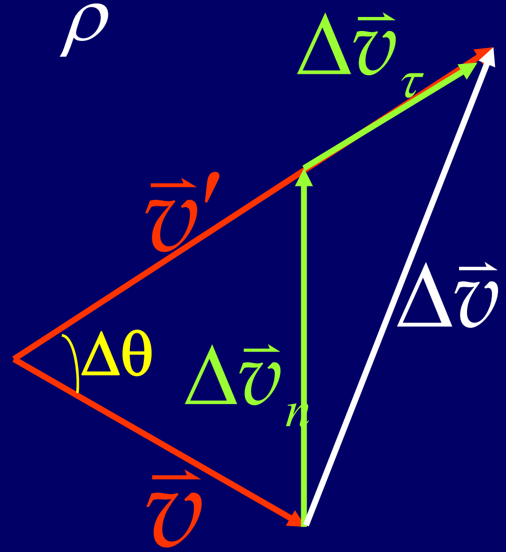
- 切向加速度反映速度大小的变化
- 其方向沿轨道切线方向

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t}$$

右边第二项称为法向加速度, 用 $\vec{a}_n$ 表示

$$\left|\vec{a}_n\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left|\Delta\vec{v}_n\right|}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{v\cdot\Delta\theta}{\Delta t}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{v\cdot\Delta\theta\Delta s}{\Delta s\Delta t}\right|$$

其中：$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{ds}{dt}=v$　　$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left|\dfrac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|=\dfrac{1}{\rho}$



法向加速度　$$\vec{a}_n=\frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

$\vec{a}_n$ 的大小　$$\left|\vec{a}_n\right|=\frac{v^2}{\rho}$$

$\vec{a}_n$ 的方向　沿法线方向，指向曲率中心。

全加速度： $\vec{a}=\vec{a}_n+\vec{a}_\tau$

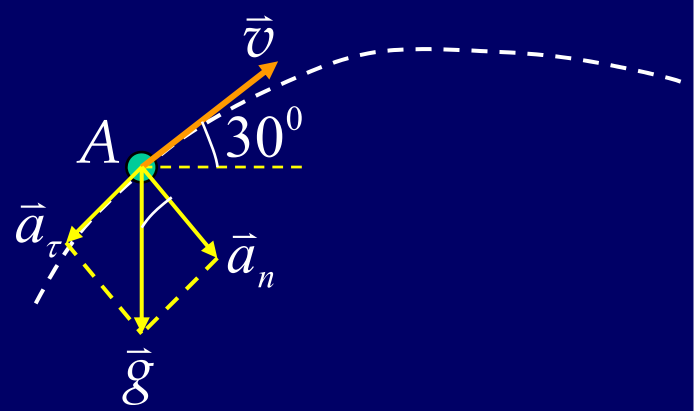
全加速度的大小： $a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}$

全加速度的方向： $\theta=\arctan\dfrac{a_n}{a_\tau}$

例6 物体作斜抛运动，测得A点的速度为 $\vec{v}$，方向如图所示. 则A点的 a_τ 和曲率半径 ρ 各为多少?

解: 由图有

$$a_\tau=-g\sin 30^0=-\frac{g}{2}$$



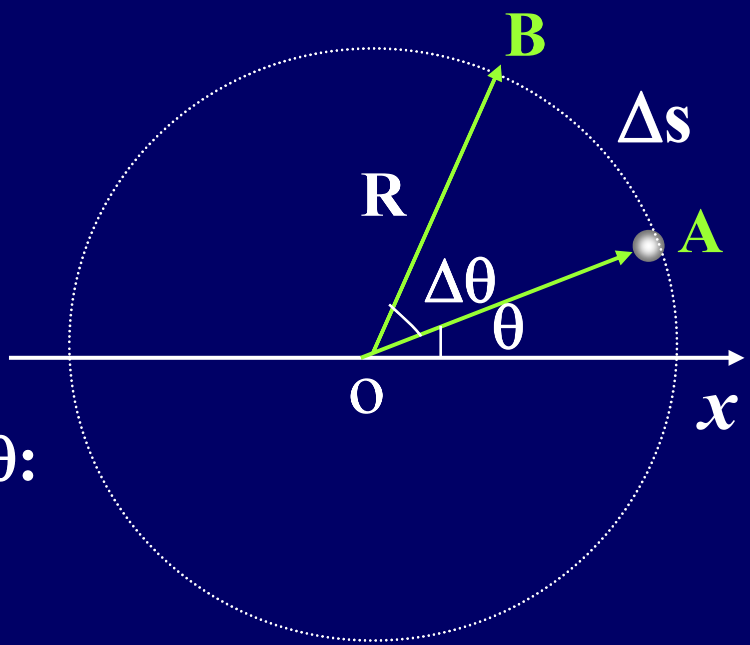
$$\because \quad a_n=g\cos 30^0=\frac{\sqrt{3}}{2}g$$

$$\therefore \quad \rho=\frac{v^2}{a_n}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{v^2}{g}$$

3. 圆周运动(circle motion)

圆周运动是一般曲线运动的一个特例，曲率半径恒为R。

(1) 圆周运动的角量描述



1) 角位置θ 角位移Δθ

角位置(angular position) θ ：

质点所在的位矢 $\vec{r}$ 与x轴正向的夹角，单位是弧度 rad。

角位移(angular displacement) Δθ:

质点从A到B位矢 $\vec{r}$ 转过的角度，单位是弧度 rad.

规定：逆时针转向Δθ为正，　顺时针转向Δθ为负

2) 角速度ω

(angular speed)

$$\boxed{\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{d\theta}{dt}\qquad(\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1})}$$

3)角加速度 α

(angular acceleration)

$$\boxed{\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \quad (\mathrm{rad \cdot s^{-2}})}$$

(2) 线量(linear measures)与角量(angular measures)的关系

$$s = R\theta \qquad \boxed{v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega}$$

$$\boxed{a_\tau = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha} \qquad \boxed{a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2}$$

(3) 匀速圆周运动:

$$\omega = \text{恒量}, \ \alpha = 0, \quad a_\tau = 0, \quad a = a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

(4) 一般变速圆周运动:

$$\alpha \neq 0, \qquad a_\tau = \frac{dv}{dt}, \qquad a_n = \frac{v^2}{R}$$

变速圆周运动的总加速度

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$$

总加速度的大小

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$$

用角量表示匀加速圆周运动的基本公式：

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\left(\theta - \theta_0\right)$$

例7 半径为$r=0.2\text{m}$的飞轮，可绕 o 轴转动。已知轮缘上一点M的运动方程为$\varphi=-t^2+4t$，求在1秒时刻M点的速度和加速度。

解：

$$\omega=\frac{d\varphi}{dt}=-2t+4 \qquad \alpha=\frac{d\omega}{dt}=-2$$

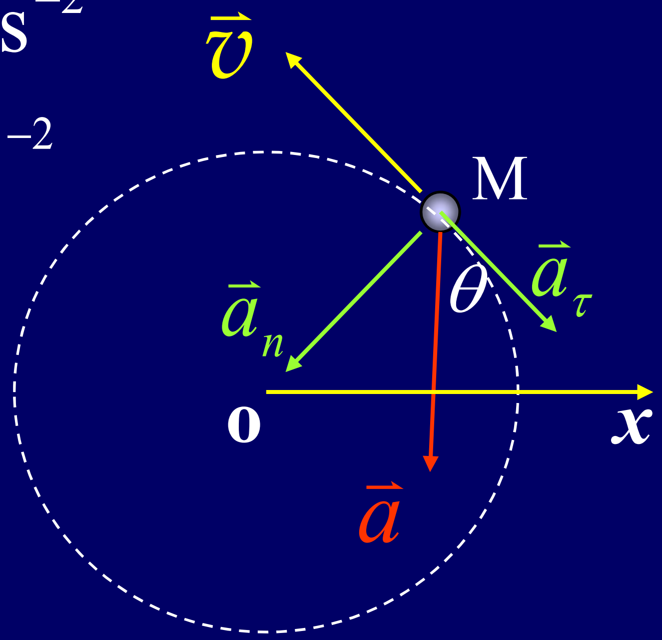
$$v=r\omega=r(-2t+4)=0.2\times(-2\times1+4)=0.4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$a_\tau=r\alpha=0.2\times(-2)=-0.4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$a_n=r\omega^2=0.2(-2\times1+4)^2=0.8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=0.89\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$\theta=\tan^{-1}\left|\frac{a_n}{a_\tau}\right|=\tan^{-1}\frac{0.8}{0.4}=63.4^\circ$$



例8 一质点沿半径为R的圆周运动，其路程 s 随时间 t 的变化规律为 $s=bt-1/2\cdot ct^2$ ，式中b，c为大于零的常数，且 $b^2>Rc$ 。求（1）质点的切向加速度和法向加速度。（2）经过多长时间，切向加速度等于法向加速度。

解：

（1） $$v=\frac{ds}{dt}=b-ct$$

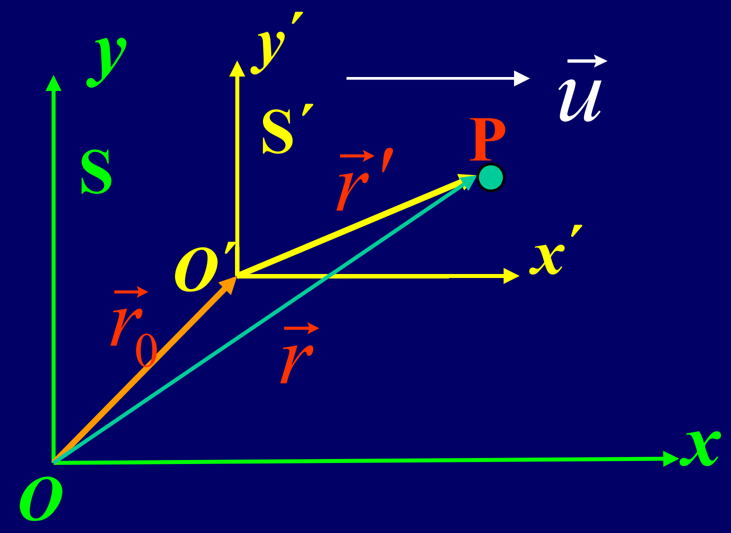
$$a_\tau=\frac{dv}{dt}=-c \qquad a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(b-ct)^2}{R}$$

（2）

$$a_\tau=a_n \qquad t=\frac{b}{c}\pm\sqrt{\frac{R}{c}}$$

§ 1.4 不同坐标系中速度和加速度的变换关系

两个坐标系：静止坐标系（静系）S和运动坐标系（动系）S′



绝对运动　运动质点（动点）相对于静系(S系)的运动。

相对运动　动点相对于动系(S′系)的运动。

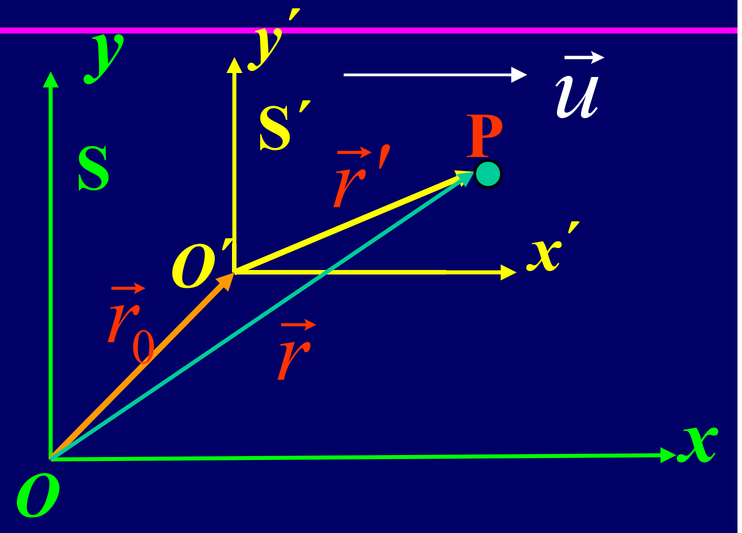
牵连运动　动系S′相对静系S的运动,。

t 时刻，质点位于P点，它相对S系的位矢为 $\vec{r}$ ，相对S′系的位矢为 $\vec{r}\,'$ ， S′系原点相对S系原点的位矢为$\vec{r}_0$ 。

由图有：

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}\,'$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}\,'$$



质点运动时，上述三个量都是时间的函数，两边对 t 求导

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}\,'}{dt}$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}\,'}$$

速度合成公式, 或称伽利略速度变换式

式中：$\vec{v}\,'$ 为运动质点对运动坐标系的速度,称为相对速度;

$\vec{u}$ 为运动坐标系对静止坐标系的速度, 称为牵连速度;

$\vec{v}$ 为运动质点对静止坐标系的速度, 称为绝对速度.

绝对速度＝相对速度与牵连速度的矢量和

$$\boxed{\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}'}$$

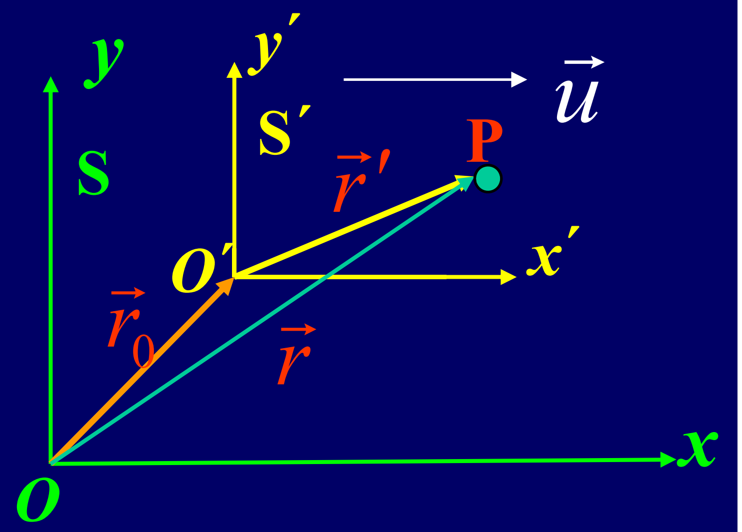
两边对 t 再求导

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt}$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}'}$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}'}$$

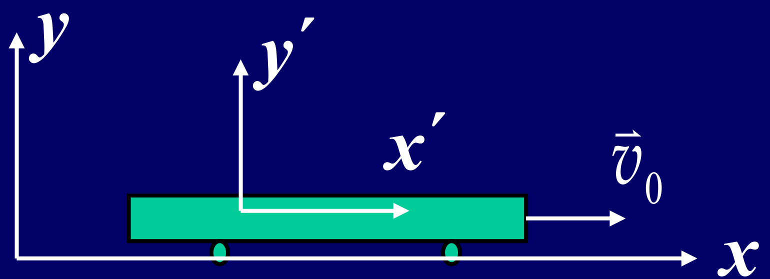
$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}'}$$



若 $\vec{u} =$ 常矢，则 $\vec{a}_0 = 0$，有 $\vec{a} = \vec{a}'$

这一结果说明在相互作匀速直线运动的两参考系中，质点的加速度相同。

例9 一观察者A坐在平板车上，车以10m/s的速率沿水平轨道前进。他以与车前进的反方向呈60°角向上斜抛出一石块，此时站在地面上的观察者B看到石块沿铅垂向上运动。求石块上升的高度。

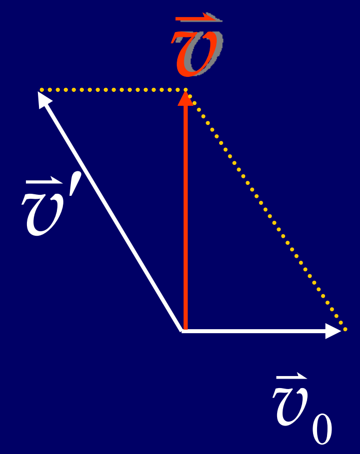


解：运动质点（石块），运动参考系（A），静止参考系（B）。

按题意有矢量关系

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0$$

作矢量图



$$v = v_0 \tan 60^\circ = 10 \tan 60^\circ = 17.3\ m \cdot s^{-1}$$

$$H = \frac{v^2}{2g} = \frac{17.3^2}{2 \times 9.80} = 15.3\ m$$