第一篇　力　学

第1章

质点运动学

质点运动学(1)

主要内容：

- 参考系和坐标系　质点
- 质点运动的描述

§1.1 参照系 坐标系 质点

1 质点 (particle)

实际物体的理想化模型，有质量无形状和大小的几何点.

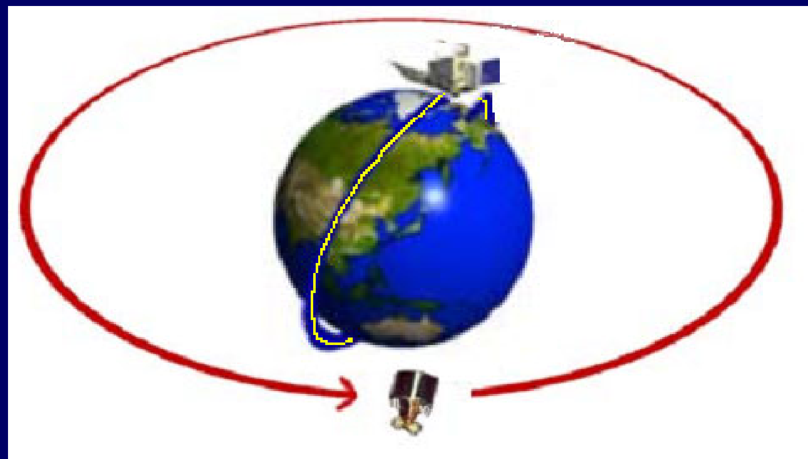
实际问题中，当物体的形状和大小对研究不起作用或所起的作用可忽略时，就可把物体当作质点来处理。

以下情况的实物均可以抽象为一个质点：

① 研究问题中,物体的形状和大小可以忽略不计

② 物体上各点的运动情况相同(平动)

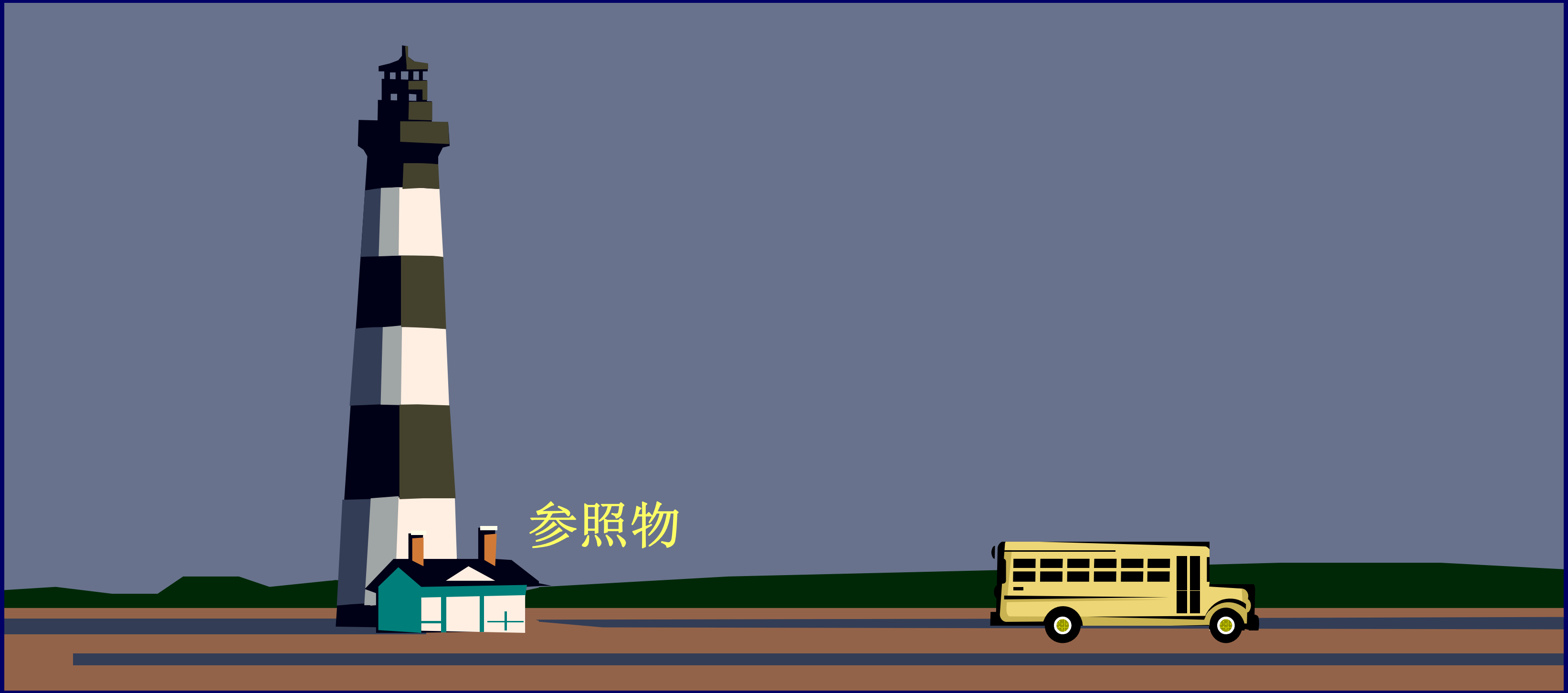
③ 各点运动对总体运动影响不大



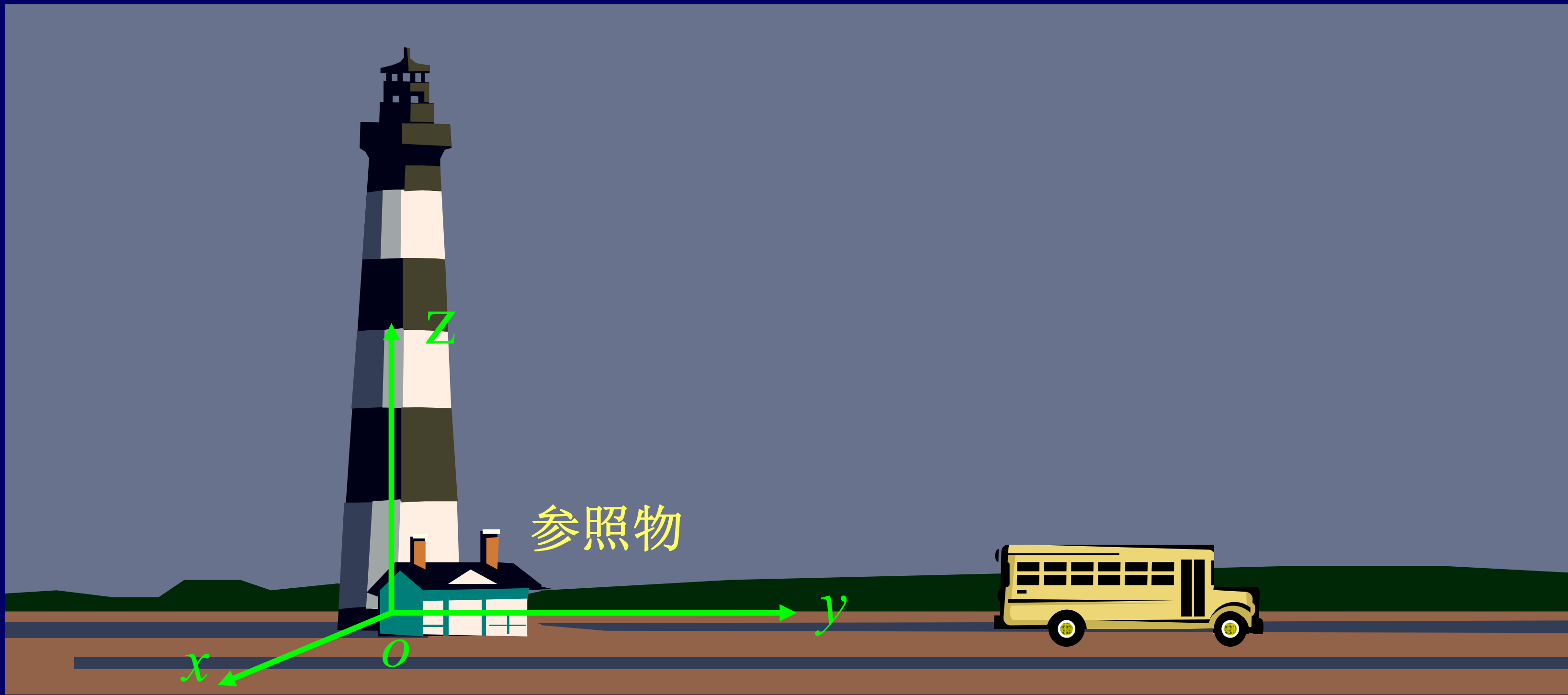
2　参考系 和 坐标系

- 物体运动具有绝对性
- 描述物体运动具有相对性

参考系(frame of reference) ———为描述物体的运动而选定的另一个作为参考的物体



坐标系 (system of coordinates)——用以标定物体的空间位置而设置的坐标系统，是固结于参考系上的一个数学抽象。

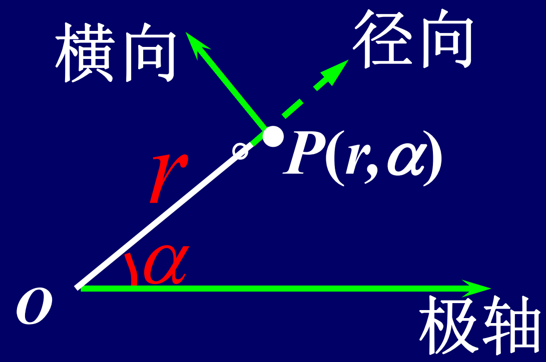


说明

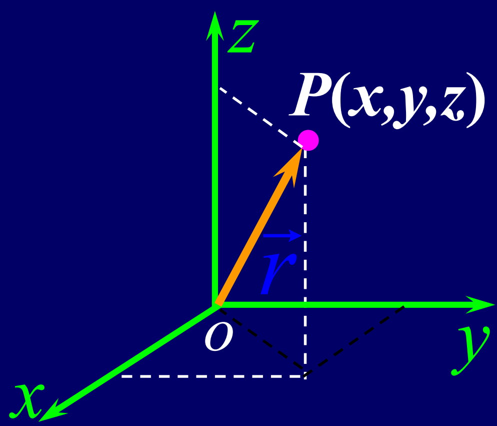
（1）运动学中参考系可任选。

(2) 参照物选定后，坐标系可任选。

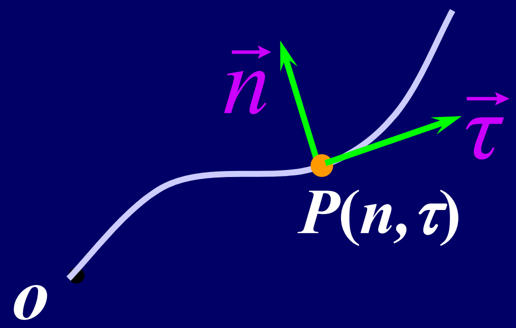
常见的坐标系：



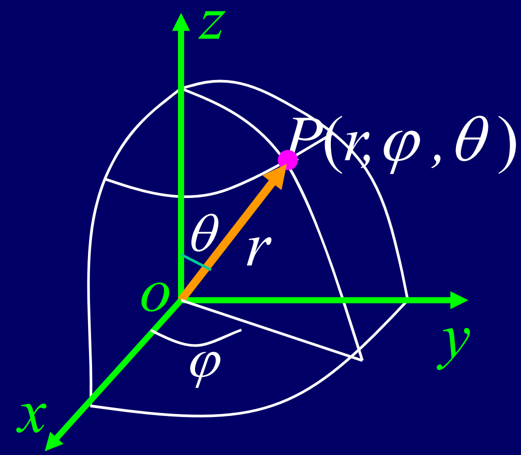
极坐标系



直角坐标系



自然坐标系

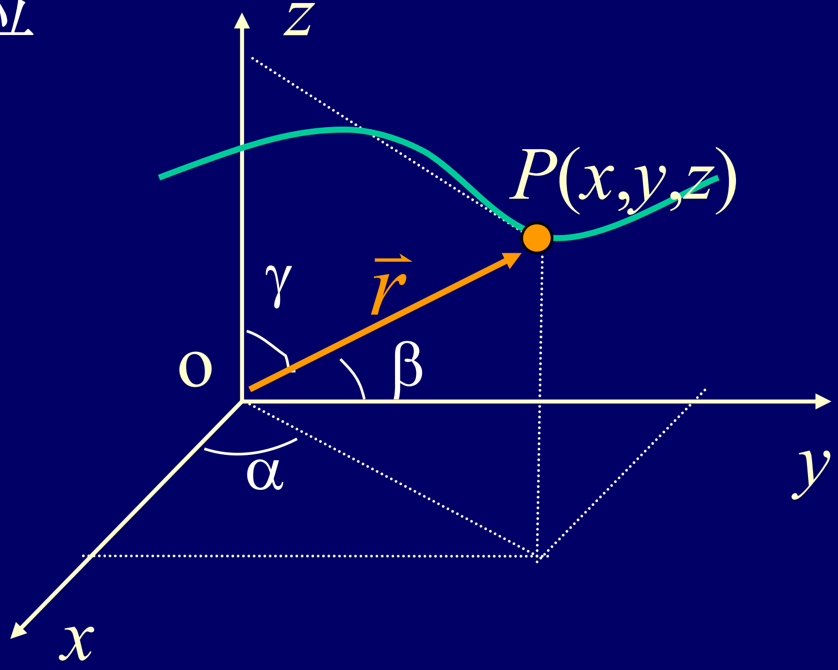


球坐标系

§1.2 质点运动的描述

1. 位置矢量（位矢或矢径）(position vector)

—— 从坐标原点指向质点所在位置 的一有向线段



位矢的坐标分量式：

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

位矢的大小：

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

位矢的方向：

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \quad \cos\beta = \frac{y}{r} \quad \cos\gamma = \frac{z}{r}$$

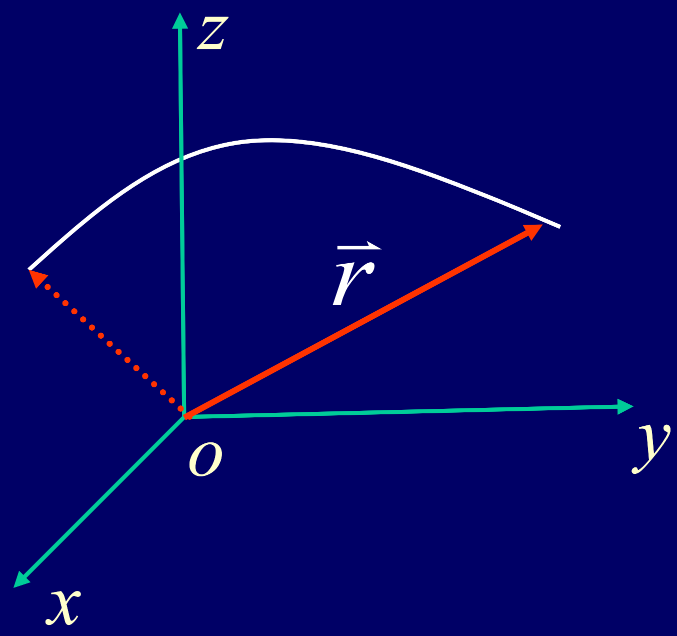
特性：矢量性、瞬时性、相对性

2. 运动方程(equation of motion)

矢量形式：

$$\boxed{\vec{r}=\vec{r}(t)}$$

$$\boxed{\vec{r}=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}}$$



参数形式：

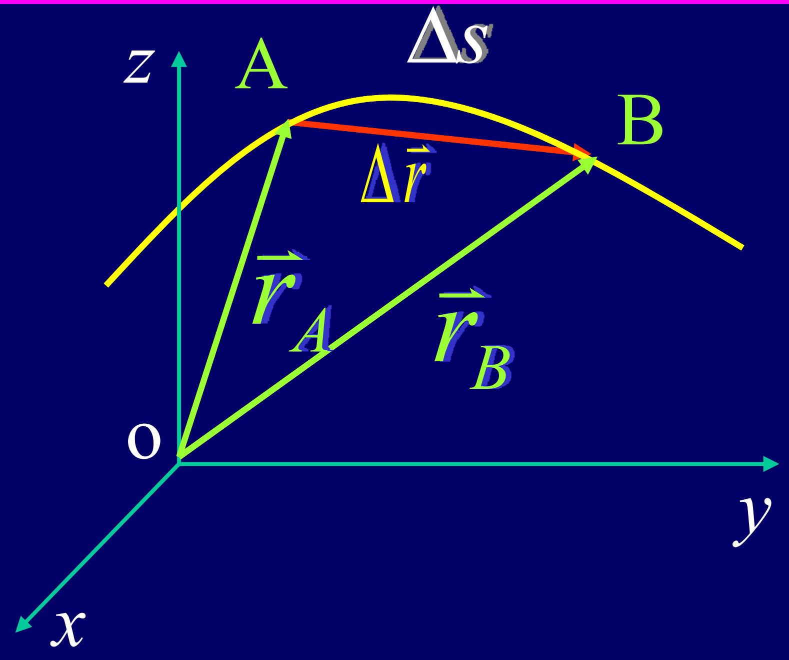
$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$$

轨道方程：

运动方程中消去时间 t

$$\boxed{\xi(x,y,z)=0}$$

3. 位移与路程



位移(displacement)：

Δt 时间内，位矢的变化量称为位移（即A到B的有向线段），用$\Delta\vec{r}$表示。

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \overrightarrow{AB}$$

位移是矢量

路程(path)：

Δt时间内质点经历过的轨迹长度称为路程，用 Δs 表示。

$$\Delta s = AB弧长$$

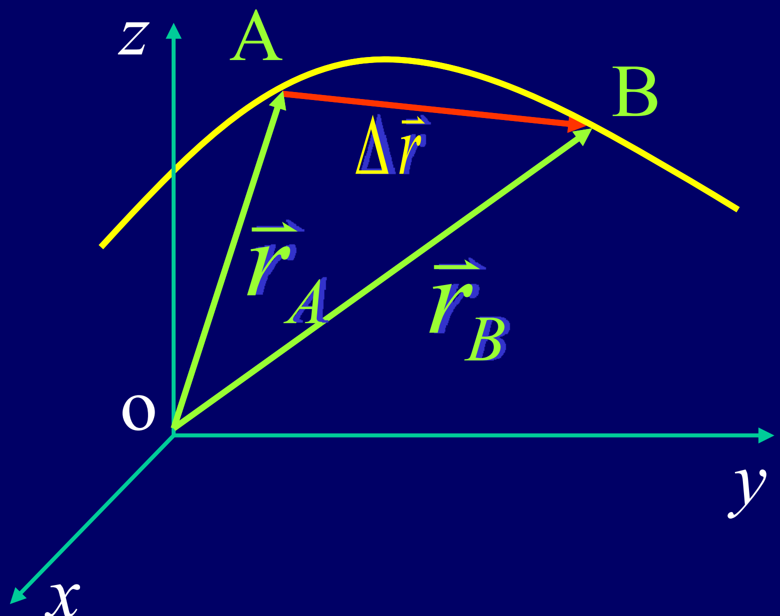
路程是标量

注意

$$\left|\Delta\vec{r}\right| \neq \Delta s$$

问题：何时取等号？

在直角坐标系中



$$\because \quad \vec{r}_B = x_B\vec{i} + y_B\vec{j} + z_B\vec{k}$$

$$\vec{r}_A = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

$$= (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

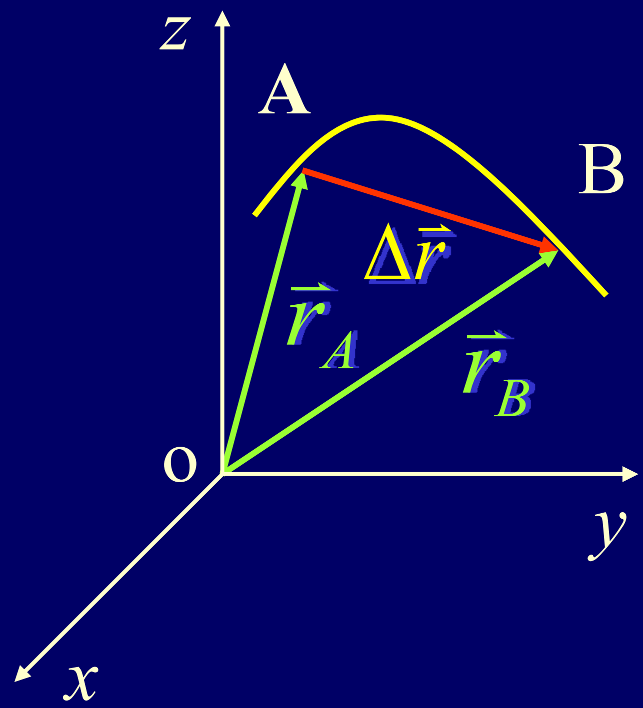
或 $\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$

位移的大小

$$\left|\Delta\vec{r}\right| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

4. 速度(speed)

描述质点运动快慢的物理量



(1) 平均速度

定义：$$\overline{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \quad (m/s)$$

注意

(1) $\overline{\vec{v}}$是矢量，方向与 $\Delta\vec{r}$ 相同

(2) $\overline{\vec{v}}$与时间间隔Δt有关

(3) 平均速度的大小 $\dfrac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$

(4) 平均速率 $\overline{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} \neq \dfrac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$

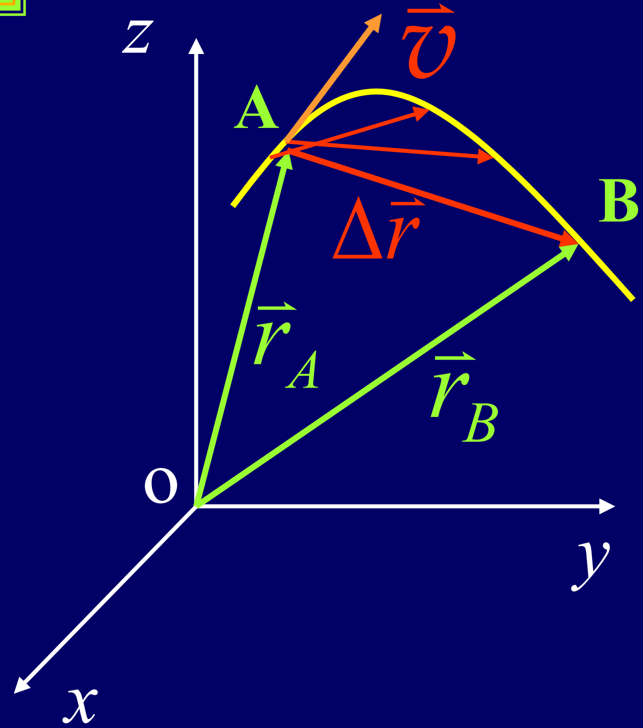
(2) 瞬时速度

速度特性：矢量性、瞬时性、相对性

定义：

$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (\mathrm{m/s})}$$

$\vec{v}$是矢量，$\vec{v}$ 的方向为轨道上质点所在处的切线方向。



速度的坐标分量式

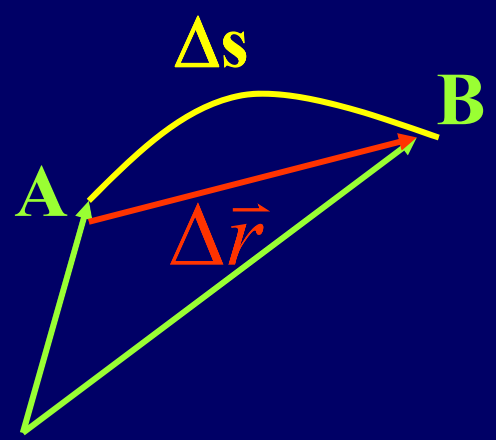
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

速度的三个分量：$v_x=\dfrac{dx}{dt},\ v_y=\dfrac{dy}{dt},\ v_z=\dfrac{dz}{dt}$

速度的大小：（速率） $v=|\vec{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$

（3） 速率(velocity)



平均速率： $\bar{v}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}\quad (m\cdot s^{-1})$

瞬时速率： $$\boxed{v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}}$$

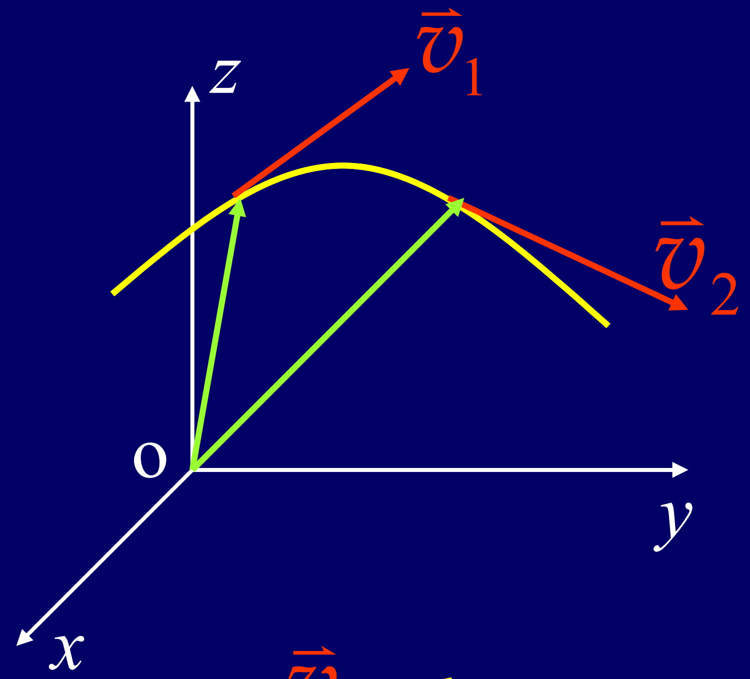
一般情况： $|\Delta\vec{r}|\neq\Delta s$　因此　$|\bar{\vec{v}}|\neq\bar{v}$

当Δt→0时： $|\Delta\vec{r}|\to|d\vec{r}|=ds$　则　$|\vec{v}|=v$

5. 加速度(acceleration)

反映速度变化快慢的物理量

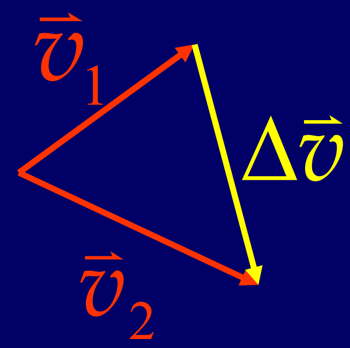
t 时刻，质点速度为 $\vec{v}_1$



$(t+\Delta t)$ 时刻，质点速度为 $\vec{v}_2$

Δt时间内，速度增量为：

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$



平均加速度

$$\boxed{\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \quad \left(\mathrm{m\cdot s^{-2}}\right)}$$

平均加速度的方向与速度增量的方向一致

瞬时加速度：

特性：矢量性、瞬时性、相对性

定义：

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\quad\left(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}\right)$$

加速度的直角坐标分量式

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{dv_x}{dt}\vec{i}+\frac{dv_y}{dt}\vec{j}+\frac{dv_z}{dt}\vec{k}$$

$$=\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$$

加速度的三个分量

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2}$$

加速度的大小：$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

加速度的方向：

当 Δt 趋向零时，速度增量 $\Delta\vec{v}$ 的极限方向;在曲线运动中,加速度的方向总是指向曲线凹的一侧.

例1 已知质点运动方程 $\vec{r} = 4t^2\vec{i} + (2t+3)\vec{j}$（SI）

求：(1)轨迹；(2)第1秒内的位移；(3) $t=0$和 $t=1$秒两时刻质点的速度和加速度.

解：(1) $\begin{cases} x = 4t^2 \\ y = 2t+3 \end{cases} \longrightarrow x = (y-3)^2$

(2) $\Delta\vec{r} = \vec{r}_{(1)} - \vec{r}_{(0)} = 4\vec{i} + 2\vec{j} \quad m$

(3) $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = 8t\vec{i} + 2\vec{j} \quad \text{m/s} \qquad \vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = 8\vec{i} \quad \text{m/s}^2$

$t = 0, \quad \vec{v} = 2\vec{j}, \quad \vec{a} = 8\vec{i}$

$t = 1, \quad \vec{v} = 8\vec{i} + 2\vec{j}, \quad \vec{a} = 8\vec{i}$

6. 质点运动学的两类问题

(1) 已知运动方程，求质点速度以及加速度

已知运动方程矢量式:

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j} \longrightarrow \begin{cases} \vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=\dfrac{dx}{dt}\vec{i}+\dfrac{dy}{dt}\vec{j} \\ \vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\dfrac{d^2x}{dt^2}\vec{i}+\dfrac{d^2y}{dt^2}\vec{j} \end{cases}$$

已知运动方程分量式:

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} v_x=\dfrac{dx}{dt} \\ v_y=\dfrac{dy}{dt} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a_x=\dfrac{dv_x}{dt}=\dfrac{d^2x}{dt^2} \\ a_y=\dfrac{dv_y}{dt}=\dfrac{d^2y}{dt^2} \end{cases}$$

结果表示成: $\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}$　　$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}$

(2) 已知质点的加速度, 求速度及运动方程

—— 积分

初始条件：t=t_0(=0)时刻的速度和位置，即 v_o和 x_0.

在一维情况下可能遇到三种类型:

(1) 已知 ***a***=常, 或***a***=***a***(t)，求 $v(t)$ 及 $x(t)$

(2) 已知 $a = a(x)$，求 $v(x)$

(3) 已知 $a = a(v)$，求 $v(x)$

例2　已知质点的运动方程 $\vec{r} = 2t\vec{i} + \left(19 - 2t^2\right)\vec{j}$　求：

（1）轨道方程；（2）$t = 2$ 秒时刻质点的位置、速度以及加速度；（3）什么时候位矢恰好与速度矢垂直？

解：（1）　$x = 2t$　，　$y = 19 - 2t^2$

消去时间参数得　$y = 19 - \dfrac{1}{2}x^2$

（2）　$$\vec{r}\Big|_{t=2} = 2\times 2\vec{i} + \left(19 - 2\times 2^2\right)\vec{j} = 4\vec{i} + 11\vec{j}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{i} - 4t\vec{j} \qquad \vec{v}\Big|_{t=2} = 2\vec{i} - 8\vec{j}\ (\mathrm{m/s})$$

$$v_2 = \sqrt{2^2 + (-8)^2} = 8.25\ \mathrm{m/s} \qquad \alpha = \tan^{-1}\frac{-8}{2} = -75°58'$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -4\vec{j}$$

$a = 4\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$　　方向沿 y 轴的负方向

（3）　$\vec{r} \cdot \vec{v} = \left[2t\vec{i} + \left(19 - 2t^2\right)\vec{j}\right] \cdot \left(2\vec{i} - 4t\vec{j}\right)$

$$= 4t - 4t(19 - 2t^2) = 4t(2t^2 - 18)$$

$$= 8t(t+3)(t-3) = 0$$

$t_1 = 0\,(s)$　，　$t_2 = 3\,(s)$　　两矢量垂直

例3　已知质点沿 x 轴运动，加速度 $a=$ 常量，$t=0$时，

$x=x_0$，　$v=v_0$ 求 $x_{(t)}$及 $v_{(t)}$．

解：

$$a=\frac{dv}{dt} \qquad dv=adt$$

两边积分：$\int_{v_0}^{v}dv=\int_0^t adt$　　$\boxed{v=v_0+at}$

又　$v=\dfrac{dx}{dt}=v_0+at$　　$dx=(v_0+at)dt$

两边再积分：$\int_{x_0}^{x}dx=\int_0^t(v_0+at)dt$

$$\boxed{x-x_0=v_0t+\frac{1}{2}at^2}$$

例4　一质点从坐标原点静止开始沿 x 轴运动，加速度 $a = 2 + 6x^2$, 求质点的速度与位移的关系.

解:

$$\because \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} = 2 + 6x^2$$

两边积分: $$\int_0^v v\,dv = \int_0^x (2 + 6x^2)\,dx$$

$$\therefore \qquad v = \sqrt{2(x + x^3)}$$

例5　一质点从坐标原点沿 x 轴运动, 初速为 v_0 , 加速度 $a=-kv^2$。证明质点的速度 v 与位移 x 有关系

$$v = v_0 e^{-kx}$$

证：$\because$ $a=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{dv}{dx}\dfrac{dx}{dt}=v\dfrac{dv}{dx}=-kv^2$

$$\frac{dv}{v}=-kdx$$

两边积分：$\displaystyle\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v}=-k\int_0^x dx,\quad \ln\frac{v}{v_0}=-kx$

$$\therefore \qquad v = v_0 e^{-kx}$$