第15章

狭义相对论

相对论(3)

主要内容：

- 狭义相对论动力学基础

§15.4 狭义相对论动力学基础

相对论的动力学问题

1、相对论的动力学方程

2、质量和速度的关系

3、质量和能量的关系

4、动量和能量的关系

1. 相对论质量和动量

前面已讲，牛顿第二定律 $\vec{F}=m\vec{a}$ 在伽利略变换下是不变的。现在知道伽利略变换只是洛伦兹变换在$u<<c$下的近似。因而一个好的力学规律应满足：

* 在洛仑兹变换下是不变的(协变的)
* 在$u<<c$时还原为经典力学的形式。

质点动量的经典形式 $\boxed{\vec{p}=m\vec{v}}$

m与运动无关，在伽利略变换下对一切惯性系成立。

在相对论中，如果仍保持动量的形式不变，则上式在洛仑兹变换下就不具有不变性。

问题： 是修改 $\vec{p}=m\vec{v}$ 的形式，还是放弃质量与运动无关的看法？

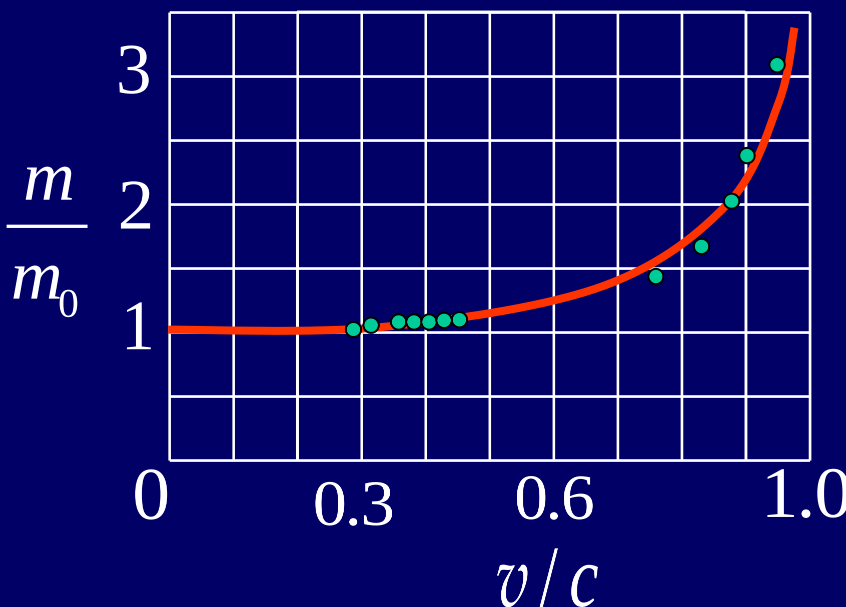
理论和实验都证明：　相对论中动量的形式仍可以写成

$\vec{p}=m\vec{v}$，但质量应改写成

$$\boxed{m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\gamma m_0}$$

m_0为物体的静质量。上式称为相对论质速(mass-speed relation)关系式。

考夫曼实验结果：
电子质量随速度变化



$v \ll c$时，$m \to m_0$

相对论动量：

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\vec{v} = \gamma\, m_0 \vec{v}$$

可以证明：

* 相对论动量表达式在洛仑兹变换下是不变的；

* 在$v \ll c$ 时还原为经典力学的形式.

2. 相对论动力学方程

按经典动能定理

$$W = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \tfrac{1}{2} m v^2 - \tfrac{1}{2} m v_0^2$$

m是恒量，只要***F***足够大或作用时间足够长就可以把物体加速到超过光速，与相对论矛盾。

按相对论质速关系，m与v有关，v越大，m越大，$v > c$时，m成为虚数而无实际意义。故光速是一切运动物体速度的极限。

$$\boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$$

相对论动力学方程写成

$$\boxed{\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \vec{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}}$$

* 相对论动力学方程在洛仑兹变换下是不变的；

* 在 $v \ll c$时还原为经典力学的形式 $\vec{F} = m\vec{a}$

所以 $\vec{F} = m\vec{a}$ 是相对论动力学方程在低速下的近似。

3. 相对论动能 能量与质量的关系

3. 相对论动能 能量与质量的关系

设静止质量为m_0的粒子从静止开始, 在力 $\vec{F}$ 作用下作一维运动。由动能定理

$$E_k=\int\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int\vec{v}\cdot\mathrm{d}(m\vec{v})$$

$$\because\quad \vec{v}\cdot\mathrm{d}(m\vec{v})=m\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}\mathrm{d}m=mv\mathrm{d}v+v^2\mathrm{d}m$$

又由质速关系 $m^2c^2-m^2v^2=m_0^2c^2$

两边微分 $\cancel{2}\cancel{m}c^2\mathrm{d}m-\cancel{2}\cancel{m}v^2\mathrm{d}m-\cancel{2}m^{\cancel{2}}v\mathrm{d}v=0$

得: $c^2\mathrm{d}m=v^2\mathrm{d}m+mv\mathrm{d}v$

所以：

$$E_k = \int \vec{v} \cdot \mathrm{d}(m\vec{v}) = c^2 \int_{m_0}^{m} \mathrm{d}m$$

$$\boxed{E_k = mc^2 - m_0c^2}$$

这就是静止质量为m_0的粒子以速率v运动时的相对论动能表达式。

爱因斯坦称m_0c^2为粒子的静能，用E_0表示；mc^2为粒子的总能，用E表示，即

$$\boxed{E_0 = m_0c^2}$$

$$\boxed{E = mc^2 = m_0c^2 + E_k = E_0 + E_k}$$

$$\boxed{E = mc^2} \qquad \boxed{E_0 = m_0 c^2}$$

$$\boxed{E_k = mc^2 - m_0 c^2}$$

这就是相对论的质能关系式。即物体的质量和能量密切联系，当质量发生Δm的变化时，必有相应的能量改变。

$$\Delta E = \Delta(mc^2) = c^2 \Delta m$$

反之亦然。

显然相对论的动能表达式与经典动能表达式不同。

但$v << c$时，上式可以还原为经典动能的形式。

$v << c$时, 将 $(1-v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ 展成级数有

$$\because \quad \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4+\cdots\approx 1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$$

$$E_k=(m-m_0)c^2=\left[\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right]m_0c^2$$

$$=\left[1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4+\cdots-1\right]m_0c^2$$

$v << c$时，略去高次项，上式就还原为经典动能的形式

$$E_k=\frac{1}{2}m_0v^2$$

4. 相对论能量与动量的关系

经典动能和动量的关系

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \qquad p = mv$$

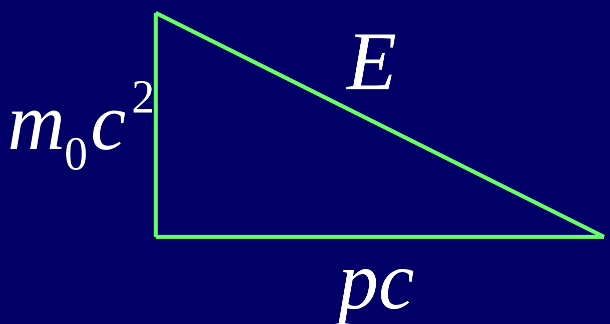
$$E_k = \frac{p^2}{2m}$$ 经典动能和动量的关系式

若把物体的质量看成恒量，则经典动能、动量关系在洛仑兹变换下是变的。上式不适用于高速运动，缺乏普遍性。必须找到一个在洛仑兹变换下是不变的的普遍关系式。

由相对论动量和能量公式

$$\left.\begin{aligned} p &= mv \\ E &= mc^2 \end{aligned}\right\} \longrightarrow v = \frac{pc^2}{E}$$

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$



$$\boxed{E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 = E_0^2 + p^2c^2}$$

上式称为相对论能量动量关系式。它在洛仑兹变换下是不变的

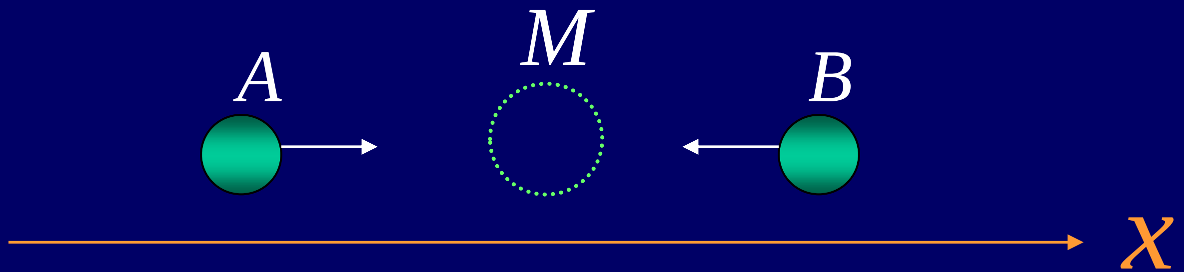
对动能为E_k的粒子，用 $E = E_k + m_0c^2$ 代入上式，得

$$E_k^2 + 2E_k m_0 c^2 = p^2 c^2$$

$v \ll c$时, $E_k \ll m_0c^2$ 略去上式第一项 $\longrightarrow E_k = \dfrac{p^2}{2m_0}$

例1 在惯性系 S 中，有两个静质量都是 m_0 的粒子 A、B 分别以速度 $\vec{v}_A = v\vec{i}$, $\vec{v}_B = -v\vec{i}$ 运动，相撞后合在一起成为一个静质量为 M_0 的粒子，求 M_0 。

解:

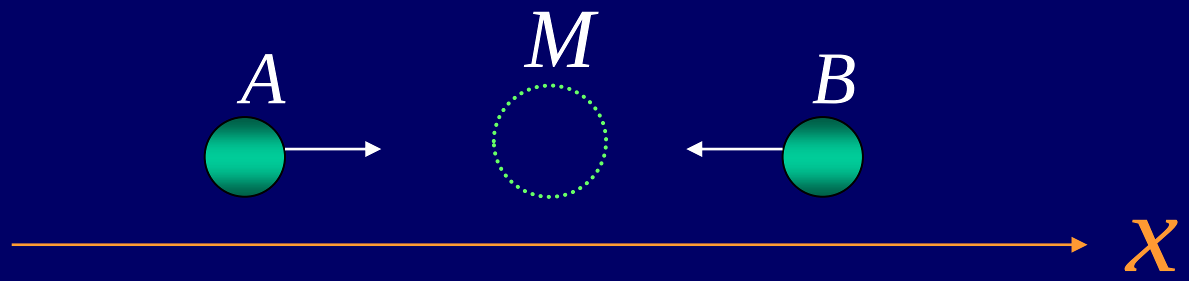


由动量守恒： $m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B = M\vec{V}$

因为A、B静止质量，运动速度都相同，故 $m_A = m_B$

但 $\vec{v}_A = -\vec{v}_B$ 因此 $\vec{V} = 0$，即合成粒子是静止的。

$$M = M_0$$



又由能量守恒：

$$M_0c^2 = m_Ac^2 + m_Bc^2$$

$$\therefore \quad M_0 = m_A + m_B = \frac{2m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} > 2m_0$$

例2 有一种热核反应

$$ {}_{1}^{2}\mathrm{H} + {}_{1}^{3}\mathrm{H} \rightarrow {}_{2}^{4}\mathrm{He} + {}_{0}^{1}\mathrm{n} $$

各种粒子的静止质量如下：

氘核（${}_{1}^{2}\mathrm{H}$） $m_{\mathrm{D}} = 3.3437\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$

氚核（${}_{1}^{3}\mathrm{H}$） $m_{\mathrm{T}} = 5.0049\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$

氦核（${}_{2}^{4}\mathrm{He}$） $m_{\mathrm{He}} = 6.6425\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$

中子（n） $m_{\mathrm{n}} = 1.6750\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$

求这一热核反应释放的能量是多少？

核反应堆

$$ {}_1^2\mathrm{H} + {}_1^3\mathrm{H} \rightarrow {}_2^4\mathrm{He} + {}_0^1\mathrm{n} $$

解： 这一反应的质量亏损为

$$ \Delta m_0 = (m_\mathrm{D} + m_\mathrm{T}) - (m_\mathrm{He} + m_\mathrm{n}) $$

$$ = 0.0311 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} $$

$$ \Delta E = \Delta m_0 c^2 = 2.799 \times 10^{-12}\,\mathrm{J} $$

1 kg 的这种核燃料所释放的能量为

$$ \frac{\Delta E}{m_\mathrm{D} + m_\mathrm{T}} = 3.35 \times 10^{14}\,\mathrm{J/kg} $$

是 **1 kg** 的优质煤所释放热量的 **1** 千万倍！

例3 一个电子被电压为10^6V的电场加速后，其质量为多少？速率为多大？

解： $$E_k = eV = 1.6\times10^{-19}\times10^6 = 1.6\times10^{-13}(\mathrm{J})$$

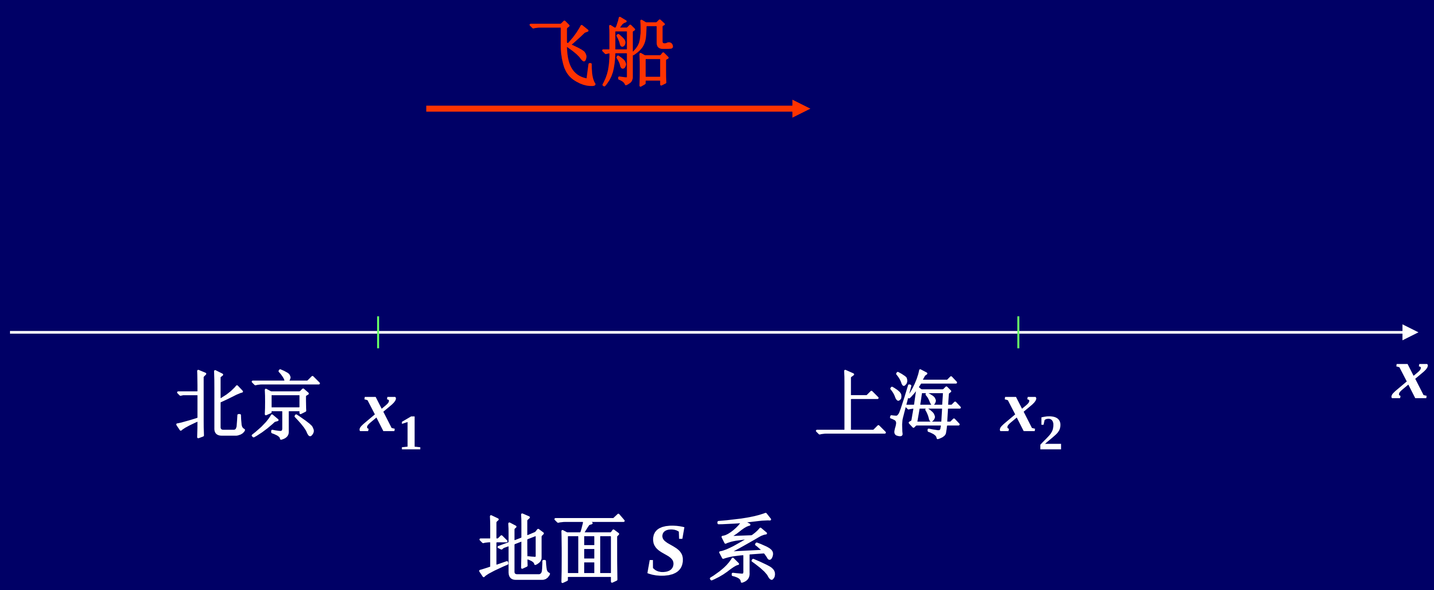
$$E_k = mc^2 - m_0c^2$$

$$m = \frac{E_k}{c^2} + m_0 = \frac{1.6\times10^{-13}}{(3\times10^8)^2} + 9.1\times10^{-31} = 2.69\times10^{-30}(\mathrm{kg})$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$v = \sqrt{1 - m_0^2/m^2}\,c = 2.82\times10^8(\mathrm{m\cdot s^{-1}}) \approx 0.94c$$

例4. 北京和上海直线相距 1 000 km ， 在某一时刻从两地同时各开出一列火车。现有一飞船沿从北京到上海的方向在高空掠过，速率恒为 $u = 9$ km/s 。求宇航员测得的两列火车开出时刻的间隔，哪一列先开出？



$$\Delta x = x_2 - x_1 = 10^6\ \mathrm{m} \qquad \Delta t = t_2 - t_1 = 0$$

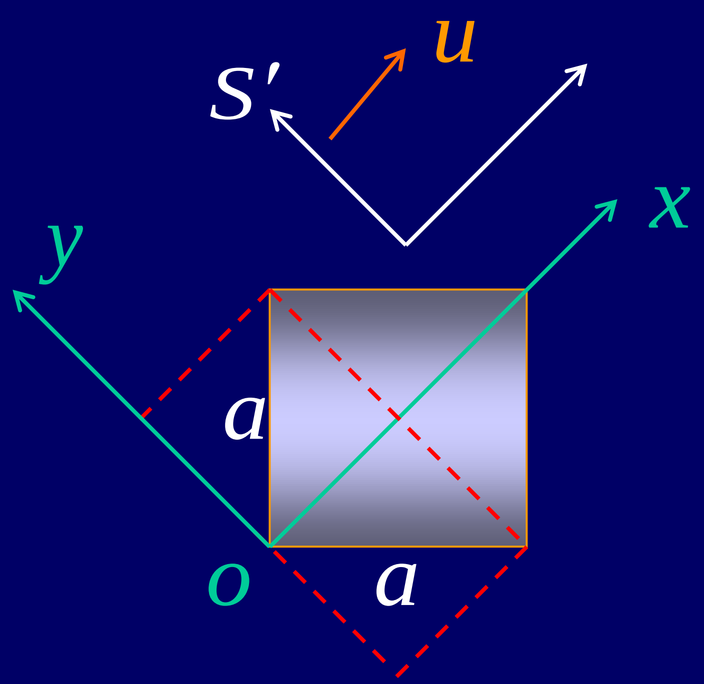
飞船系：由洛仑兹变换得

$$t_2' - t_1' = \frac{(t_2 - t_1) - \dfrac{u}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \approx -10^{-7}\ \mathrm{s}$$

上海先发车。

例5 S系中有一静止的正方形，面积为100cm²。S'系以0.8c的速度沿正方形的对角线匀速运动，求S'系中观察者测得的该图形的面积。

解： 设S系中测得正方形的边长为*a*，以对角线为*x*轴的正方向（如图）



则边长在坐标轴上投影的大小为：

$$a_x = \frac{\sqrt{2}}{2}a, \quad a_y = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

S系中的面积可表示为：

$$S = 2a_x \cdot a_y$$

在 S'系中

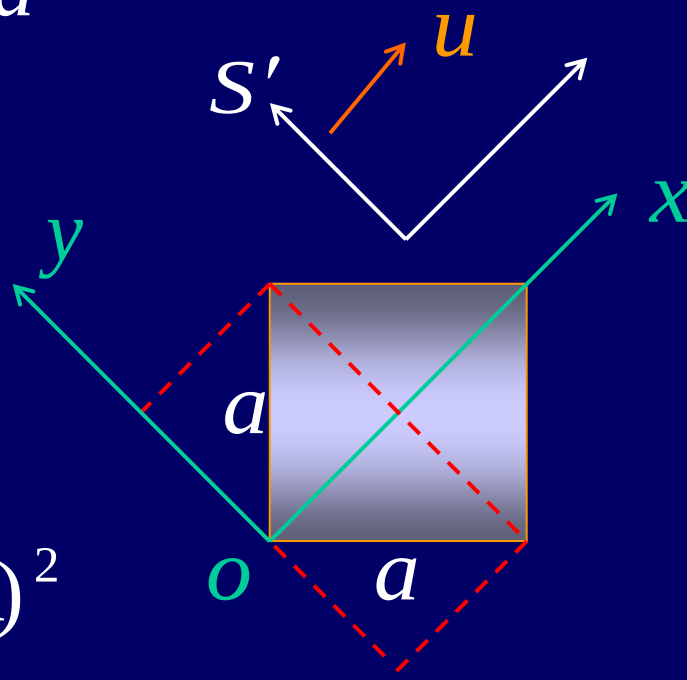
$$a'_x = a_x\sqrt{1-u^2/c^2} = 0.6\times\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$a'_x = a_x\sqrt{1-u^2/c^2} = 0.6\times\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$a'_y = a_y = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

在S'系中测得的图形为菱形，其面积为：

$$S' = 2a'_x\cdot a'_y = 0.6a^2 = 60\,(\text{cm})^2$$



本章基本要求：

1）经典力学的相对性原理与狭义相对论的相对性原理有什么不同?

2）经典力学的时空观与狭义相对论的时空观有什么不同?

3）记住下列公式：

* 洛仑兹坐标变换式：
* 相对论长度收缩和时间延缓公式
* 相对论质速关系，质能关系，能量动量关系.

作业：

P173~175页，

选8， 9，   填14，计22