第15章

狭义相对论

相对论(2)

主要内容：

- 洛伦兹变换

§ 15. 3 洛伦兹变换

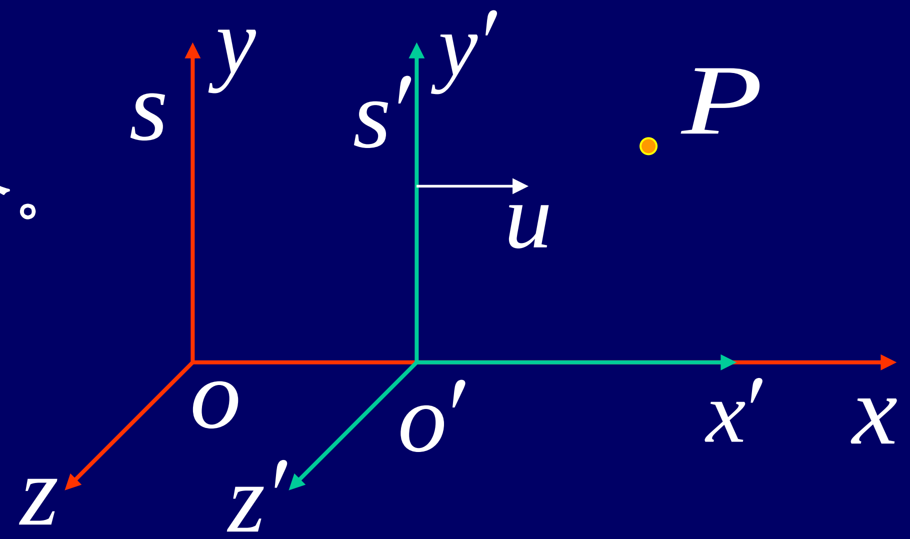
爱因斯坦依据两个假设导出了新的时空坐标变换关系 ——

1. 洛伦兹坐标变换

惯性系 S'相对S以速度u沿x正向运动

$t = t' = 0$ 时, 两坐标系原点重合。

分别在 S' 和S系中测量发生在 P 点的同一物理事件。



S'系测得P点的时空坐标为:

$$(x' , y' , z' , t')$$

S 系测得P点的时空坐标为: (x , y , z , t)

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

y y'

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$y = y'$$

z x

$$z = z'$$

$$t = \frac{t' + \frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

洛伦兹坐标变换及其逆变换

为何新的时空坐标变换关系以洛伦兹命名？

简写成

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - ut) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{u}{c^2}x\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \gamma(x' + ut') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \dfrac{u}{c^2}x'\right) \end{cases}$$

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}}}$$

洛伦兹坐标变换表明:

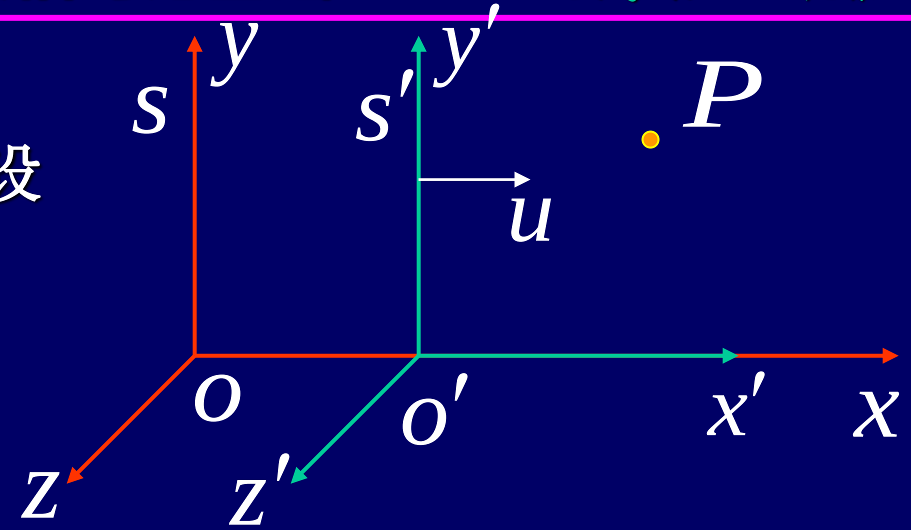
(1) 时间与空间不再独立, 而是相互关联。

(2) 低速情况下, 即 $u << c$ 时, $\gamma \to 1$

洛伦兹变换 ⟶ 伽利略变换。

即 伽利略变换是洛伦兹变换在低速下的极限。

2. 洛伦兹坐标变换的推导



依据：狭义相对论的两个基本假设

$t = t' = 0$ 时, 两坐标系原点重合。

分别在 S' 和S系中测量发生在 P 点的同一物理事件。得两组空时坐标

$$(x', y', z', t')\text{和}(x, y, z , t)$$

因两坐标系仅在 x 方向有相对运动，显然

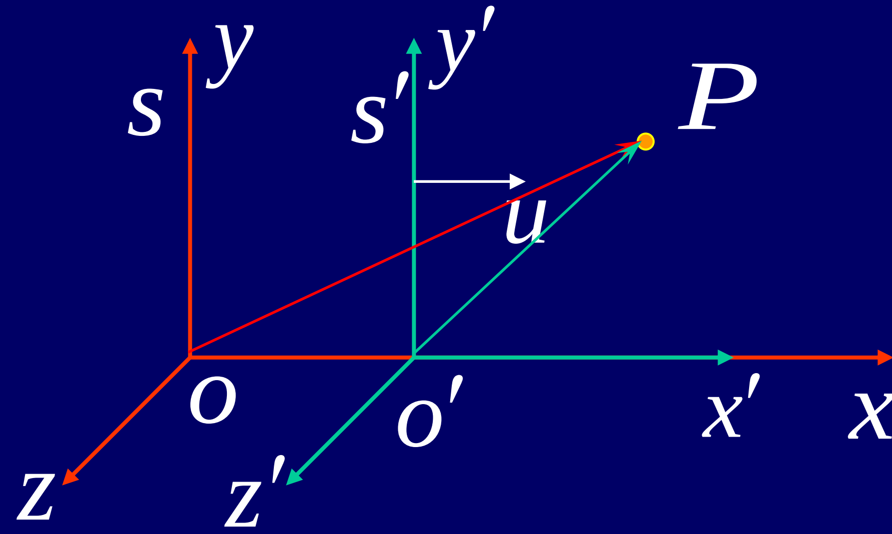
$$y' = y, \quad z' = z$$

下面确定 (x,t) 与 (x',t') 之间的变换关系

在一个惯性系中测量一物理事件，其空时坐标应是唯一的，在不同惯性系中测量同一物理事件，其空时坐标应是一一对应的，变换关系应是线性的，可一般表示为：

$$x' = a_1 x + a_2 t \qquad ①$$

$$t' = b_1 x + b_2 t \qquad ②$$



下面确定系数 a_1, a_2和 b_1, b_2

对"o'"点，S' 系在任意t'时刻测得的坐标为

$$x' = 0$$

而S系在t时刻测得o'的坐标为

$$x = ut$$

上两式代入①，可得$a_2 = -a_1 u$， ①式化为

$$x' = a_1(x - ut) \qquad ③$$

设在 $t = t' = 0$ 时刻，从o（或o'）发出一光信号，一段极短的时间后到达 P 点。由光速不变原理，有

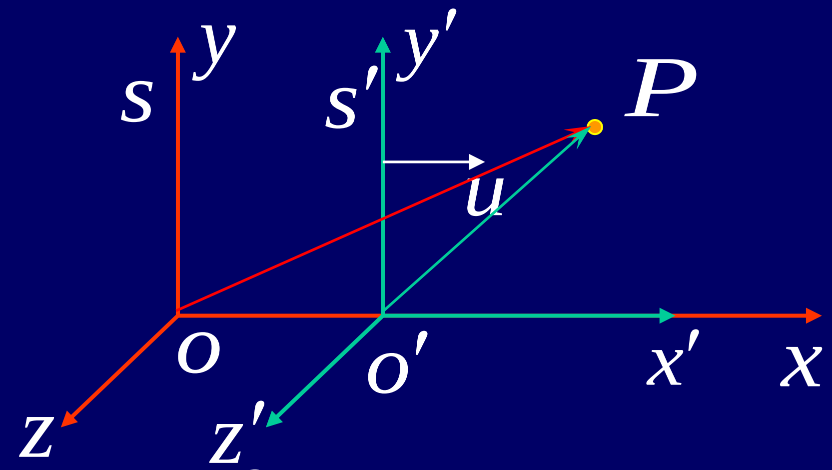
$$\overline{OP}^2 = x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

$$\overline{O'P}^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

$$t' = b_1 x + b_2 t \quad ② \qquad x' = a_1(x - ut) \quad ③$$

$$\overline{OP}^2 = x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

$$\overline{O'P}^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$



上两式相减，得

$$x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2$$

②、③两式代入上式，得

$$x^2 - c^2 t^2 = a_1^2 (x - ut)^2 - c^2 (b_1 x + b_2 t)^2$$

上式右边展开，同变量的项合并，得

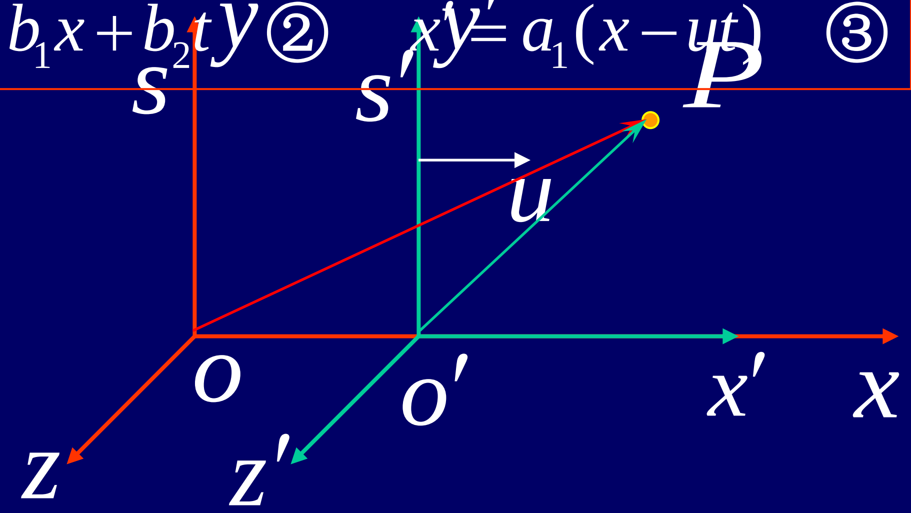
$$x^2 - c^2 t^2 = (a_1^2 - c^2 b_1^2) x^2 - (2a_1^2 u + 2c^2 b_1 b_2) xt + (a_1^2 u^2 - c^2 b_2^2) t^2$$

比较两边同类项的系数，有

$$\begin{cases} a_1^2 - c^2 b_1^2 = 1 \\ a_1^2 u + c^2 b_1 b_2 = 0 \\ a_1^2 u^2 - c^2 b_2^2 = -c^2 \end{cases}$$

$$t' = b_1 x + b_2 t \quad ② \qquad x' = a_1(x - ut) \quad ③$$

$$\begin{cases} a_1^2 - c^2 b_1^2 = 1 \\ a_1^2 u + c^2 b_1 b_2 = 0 \\ a_1^2 u^2 - c^2 b_2^2 = -c^2 \end{cases}$$



解此方程组，可得

$$a_1 = b_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$b_1 = -\frac{u}{c^2\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

将 a_1, b_1, b_2 的值代回②、③两式，并注意 $y' = y, z' = z$，即得洛伦兹坐标变换式

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - ut) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right) \end{aligned}$$

3. 用洛伦兹坐标变换验证狭义相对论时空规律

（1）同时的相对性

在S'系中同时不同地发生的两事件，在S系中测量，两事件的时间间隔 $\Delta t = t_2 - t_1$ ，由洛伦兹变换有

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma\left(t_2' + \frac{u}{c^2}x_2'\right) - \gamma\left(t_1' + \frac{u}{c^2}x_1'\right) = \gamma\frac{u}{c^2}(x_2' - x_1')$$

因 $x_2' - x_1' \neq 0$，故在S系中并不同时。只有既同时又同地发生的两事件在另一惯性系中测量才是同时的，同时具有相对性。

例1 S 系中两事件同时发生在x轴上相距 $x_2 - x_1 = 1000\,\mathrm{m}$ 的两点，在S'系中测得两事件发生的地点相距$x_2' - x_1' = 2000\,\mathrm{m}$，求 S系中测得两事件的时间间隔 $\Delta t' = t_2' - t_1'$。

解: 已知 $\Delta x = x_2 - x_1 = 1000\,\mathrm{m},\ t_2 = t_1$

$\Delta x' = x_2' - x_1' = 2000\,\mathrm{m}$

求 $\Delta t' = t_2' - t_1'$

由洛伦兹变换

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \gamma(t_2 - \frac{u}{c^2}x_2) - \gamma(t_1 - \frac{u}{c^2}x_1) = -\gamma\frac{u}{c^2}(x_2 - x_1)$$

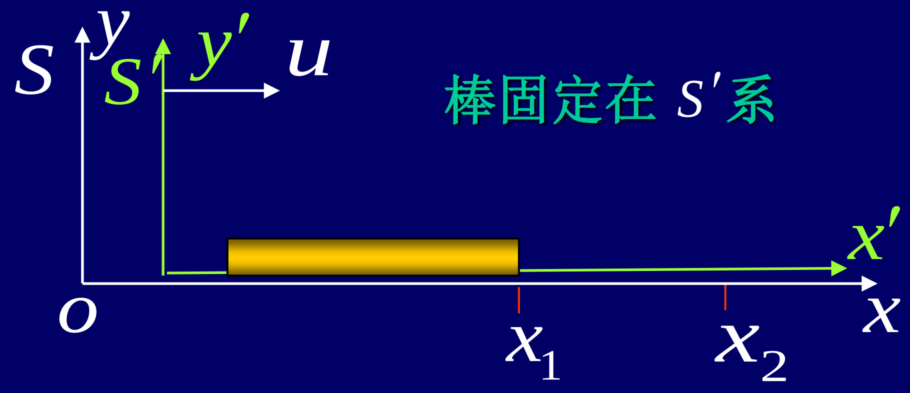
$$\Delta x' = x_2' - x_1' = \gamma(x_2 - ut_2) - (x_1 - ut_1) = \gamma(x_2 - x_1)$$

式中 $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$ 由第二式可解得 $u = \dfrac{\sqrt{3}}{2}c$

代入第一式得 $\Delta t' = t_2' - t_1' = -5.77\times10^{-6}\,\mathrm{s}$

负号表示 S 系中后方的那一事件先发生.

（2）时间延缓效应



考察棒的右端通过S系中两个固定点 x_1 和 x_2 作为两物理事件。

S' 系观察者认为，两事件发生于 S' 同一地点，但不同时刻。

在S系中测量此两事件的时间间隔，由洛伦兹变换有

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma(t_2' + \frac{u}{c^2}x') - \gamma(t_1' + \frac{u}{c^2}x')$$

$$= \gamma(t_2' - t_1') = \gamma\,\Delta t_0$$

式中 $t_2' - t_1' = \Delta t_0$ 为固有时。测量时大于固有时，运动的时钟变慢了。

每个观察者都测得相对他运动着的时钟变慢了，即动钟变慢。

例2. 半人马座α 星是距离太阳系最近的恒星，它距离地球4.3×10^{16}m。设有一宇宙飞船自地球飞到半人马座α 星，若宇宙飞船相对地球的速度为0.999c，按地球上的时钟计算要用多少年时间？如以飞船上的时钟计算，所需时间又为多少年？

解:

按地球上的时钟计算，飞船飞到 α 星所需时间为

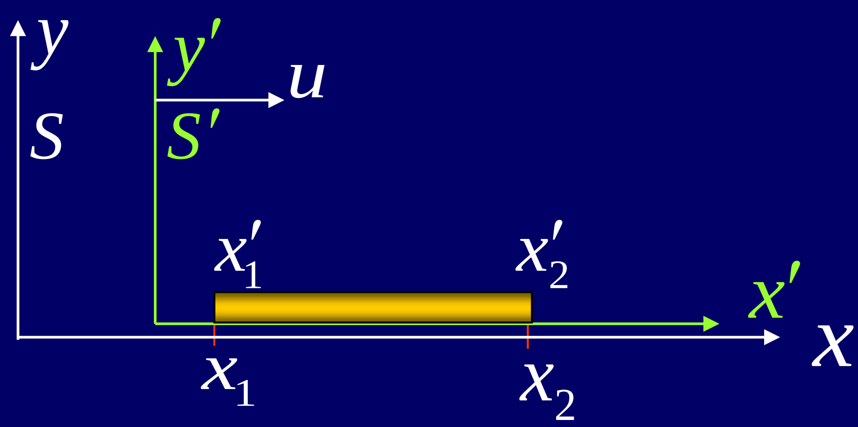
$$\Delta t=\frac{s}{v}=\frac{4.3\times10^{16}}{0.999\times3\times10^{8}\times365\times24\times3600}=4.55\text{年}$$

若用飞船上的钟测量，飞船飞到 α 星所需时间为

$$\Delta t'=\gamma^{-1}\Delta t=\sqrt{1-0.999^{2}}\times4.55=0.203\text{年}$$

正是时间膨胀效应使得在人的有生之年进行星际航行成为可能。

（3）长度收缩效应



一刚性棒静止在S'系的 x'轴上

S'系中的观察者测得棒长为

$$l_0 = x_2' - x_1'$$

S系中的观察者必须同时$(t_2 = t_1)$测得棒两端点的坐标，设为x_1和 x_2，则S系测得棒的长度l 由洛伦兹变换，有

$$l = x_2 - x_1 = \gamma[(x_2' - x_1') + u(t_2' - t_1')]$$

考虑到 $t_2 = t_1$ ，上式中

$$t_2' - t_1' = -\frac{u}{c^2}(x_2' - x_1') = -\frac{u}{c^2} l_0$$

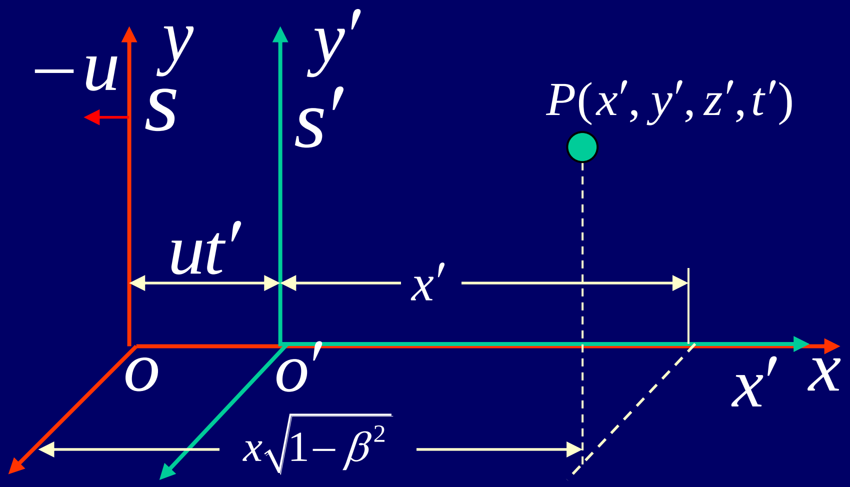
即S系中测得的棒长： $l = l_0\sqrt{1 - u^2 / c^2} < l_0$

$$l = l_0\sqrt{1-u^2/c^2} = \frac{l_0}{\gamma} < l_0$$

即 运动的棒沿运动方向收缩了。

长度的测量与被测物体相对测量者的运动有关，每一个观察者都测得相对他运动的物体沿运动方向缩短了。

- 直接从相对论效应出发可导出洛伦兹变换



P点发生的事，在 S' 系中测，若用S系的坐标x表达，应计及长度收缩效应

$$x' = x\sqrt{1-\beta^2} - ut'$$

$$\boxed{\beta = \frac{u}{c}}$$

$$x' = x\sqrt{1-\beta^2} - ut'$$

同理，在S系中测，有

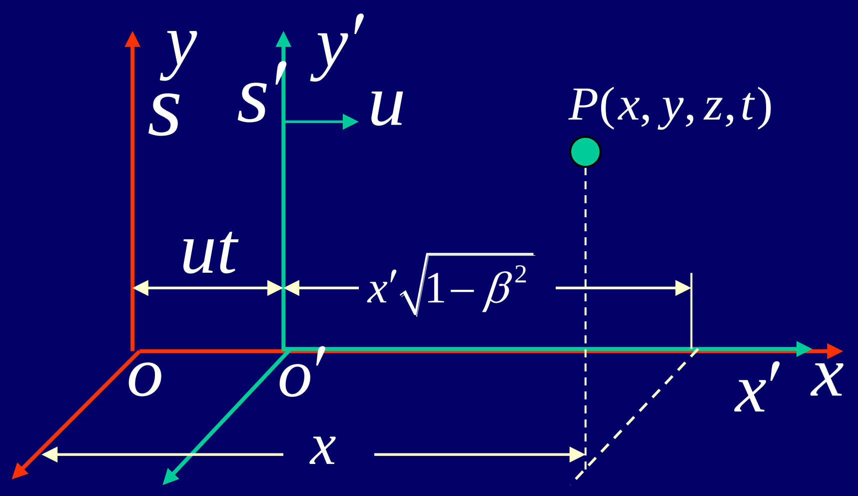
$$x = x'\sqrt{1-\beta^2} + ut$$

以上两式消去 x' ，得

$$t' = \frac{t - \dfrac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

代回 x' 式，得

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

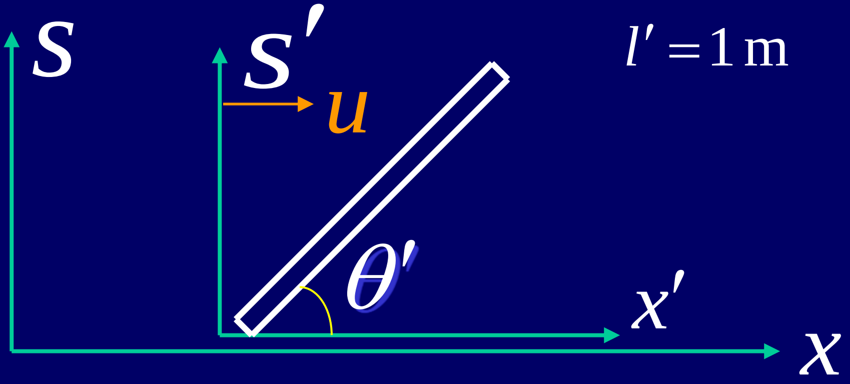


例3 一长为1m 的棒，相对于S'系静止并与 x'轴夹$\theta' = 45^{\circ}$ 问：在S 系的观察者来看，此棒的长度以及它与 x 轴的夹角为多少？（已知 $u=\sqrt{3}c/2$ ）

解：

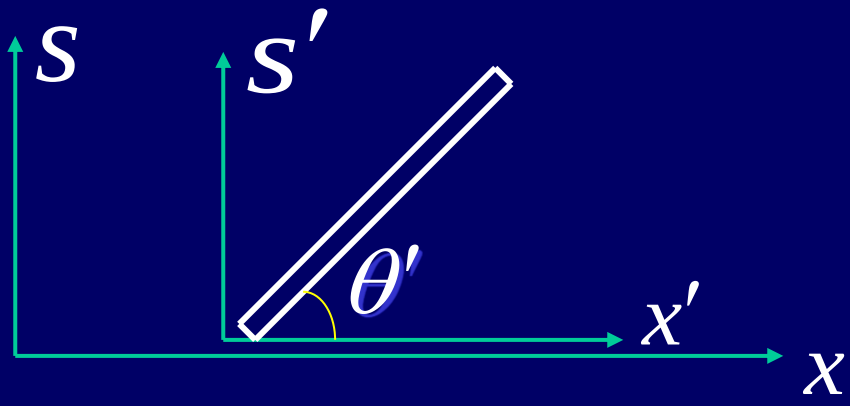
$$l'_x = l'\cos\theta'$$

$$l_y = l'_y = l'\sin\theta'$$



$$l_x = l'_x\sqrt{1-u^2/c^2} = l'\cos\theta'\sqrt{1-u^2/c^2}$$

$$l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2} = l'\sqrt{1-\left(u^2/c^2\right)\cos^2\theta'} = 0.79\ \mathrm{m}$$



$$\tan\theta = \frac{l_y}{l_x} = \frac{l'\sin\theta'}{l'\cos\theta'\sqrt{1-u^2/c^2}} = 2$$

$$\theta = 63°27'$$

4. 相对论速度变换式

$$x = \frac{x' + ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$y = y'$$

……

$$v_x = \frac{v'_x + u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$v_y = v'_y$$

……

洛伦兹坐标变换式两边微分，得

$$\begin{cases} x=\gamma(x'+ut') \\ y=y' \\ z=z' \\ t=\gamma(t'+\dfrac{u}{c^2}x') \end{cases}$$

$$\mathrm{d}x=\gamma(\mathrm{d}x'+u\mathrm{d}t')$$

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}y',\quad \mathrm{d}z=\mathrm{d}z'$$

$$\mathrm{d}t=\gamma(\mathrm{d}t'+\frac{u}{c^2}\mathrm{d}x')$$

最后一式两边除前三式的两边得：

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x'+u\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t'+\dfrac{u}{c^2}\mathrm{d}x'}=\frac{v'_x+u}{1+\dfrac{u}{c^2}v'_x}$$

$$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}y'}{\gamma(\mathrm{d}t'+\dfrac{u}{c^2}\mathrm{d}x')}=\frac{v'_y}{\gamma(1+\dfrac{u}{c^2}v'_x)}$$

同理可得:

$$v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{v'_z}{\gamma\left(1+\frac{u}{c^2}v'_x\right)}$$

写到一起:

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{v'_x + u}{1+\dfrac{u}{c^2}v'_x} \\ v_y = \dfrac{v'_y}{\gamma\left(1+\dfrac{u}{c^2}v'_x\right)} \\ v_z = \dfrac{v'_z}{\gamma\left(1+\dfrac{u}{c^2}v'_x\right)} \end{cases} \qquad \begin{cases} v'_x = \dfrac{v_x - u}{1-\dfrac{u}{c^2}v_x} \\ v'_y = \dfrac{v_y}{\gamma\left(1-\dfrac{u}{c^2}v_x\right)} \\ v'_z = \dfrac{v_z}{\gamma\left(1-\dfrac{u}{c^2}v_x\right)} \end{cases}$$

- 显然当u远远小于c时，洛伦兹速度变换式回到伽利略速度变换式。
- 洛伦兹速度变换式与光速不变原理一致。

设S系测得真空中的光速为c，即$v_x=c$，由伽利略变换，S'系测得的光速为

$$v'_x=c-u$$

但由洛伦兹变换，光对S'系的速度仍为c．因为

$$v'_x=\frac{v_x-u}{1-\frac{u}{c^2}v_x}=\frac{c-u}{1-\frac{u}{c^2}c}=c$$

作业:

P173~175页,

选1，6，填11，计15，18