第3章

刚体力学基础

刚体(1)

主要内容：

- 刚体及刚体定轴转动的描述
- 刚体定轴转动定律

§3.1 刚体及刚体定轴转动的描述

刚体(rigid body)：

在外力作用下不产生形变的物体。

组成刚体的每个质点称为刚体的一个质量元(element mass)，每个质量元都服从质点力学规律。

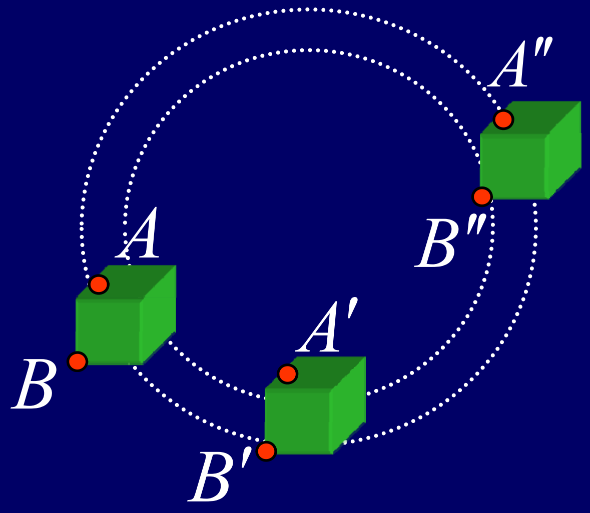
质点 $\xrightarrow{\text{集合}}$ 质点系 $\xrightarrow{\text{特例}}$ 刚体

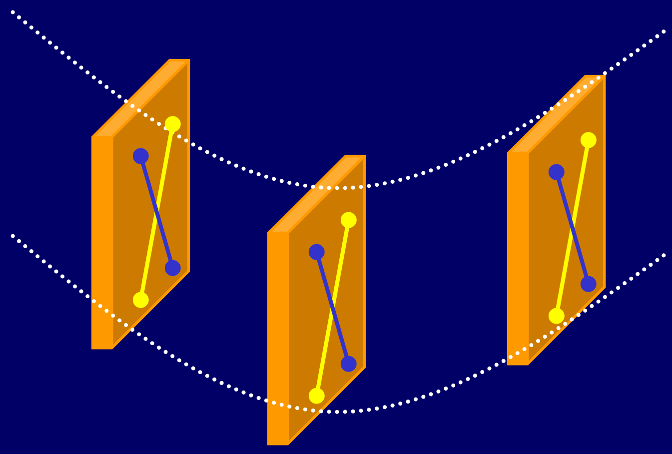
特点： 任意两点间的距离始终保持不变

刚体的运动：
- 平动
- 定轴转动
- 一般运动（平动＋转动）

1、刚体的平动(translation)

特点：体内任意两点的连线在运动中始终保持平行。



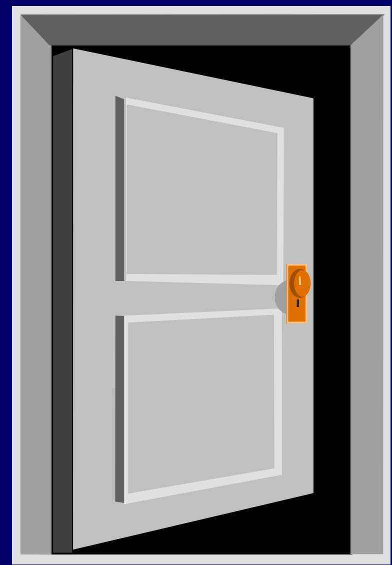


刚体的平动可以简化成质点处理

2、刚体的转动(rotation)

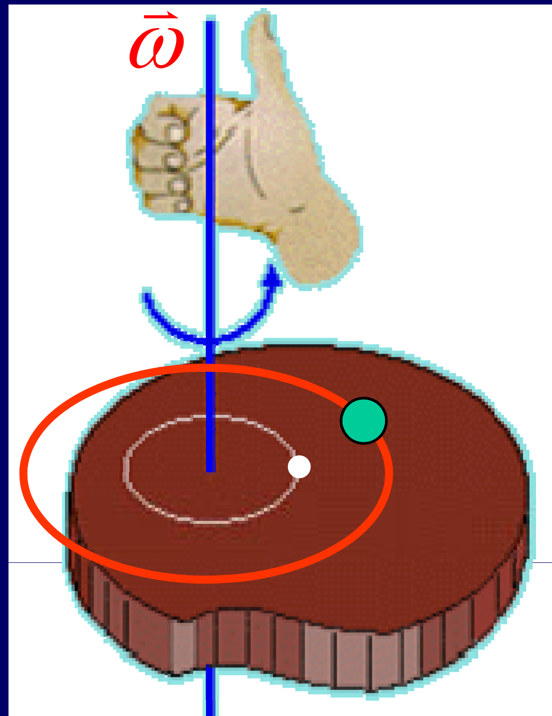
特点：刚体上所有质点都绕同一直线作圆周运动。

这条直线称为转轴(rotation axis) 。转轴固定的称为**定轴转动**。



刚体的一般运动可看成平动与定轴转动的叠加。

3、描述定轴转动的物理量



用角量描述定轴转动

转动平面：

刚体定轴转动的特点：

（1）转动平面垂直于转轴。

（2）转动平面上各点均作圆周运动，角量相同，线量不同。

（3）定轴转动刚体上各点的角速度矢量 $\vec{\omega}$ 的方向均沿轴线。

基本物理量:

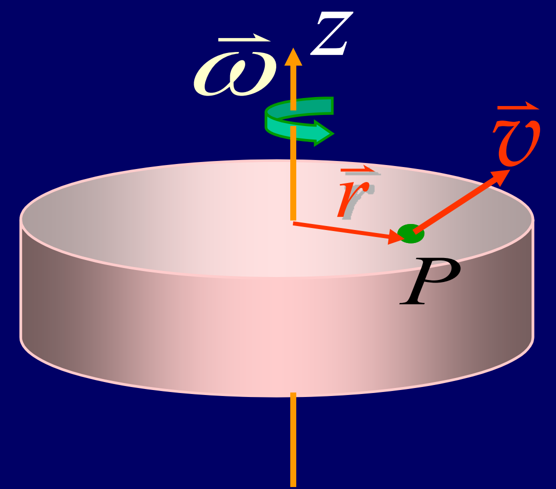
角坐标:　θ　单位:弧度(rad)

角位移:　$\Delta\theta,\ \mathrm{d}\theta$

角速度大小:　$\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$　单位:弧度·秒$^{-1}$(rad·s^{-1})

刚体上任意一点的线速度 $\vec{v}$ 与角速度 $\vec{\omega}$ 的关系:

$$\boxed{\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}}$$



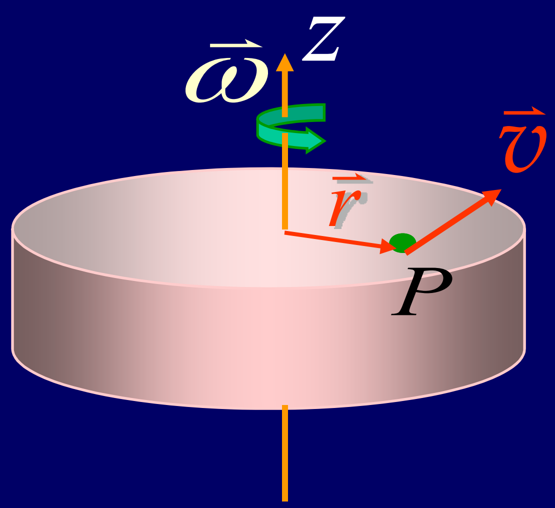
角加速度矢量:　$\vec{\alpha}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$　单位:弧度·秒$^{-2}$(rad·s^{-2})

定轴转动中 $\vec{\alpha}$ 的方向沿转轴，与 $\vec{\omega}$ 的方向相同或相反.

线量与角量的关系：

$$v = \omega r, \quad a_\tau = r\alpha$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$



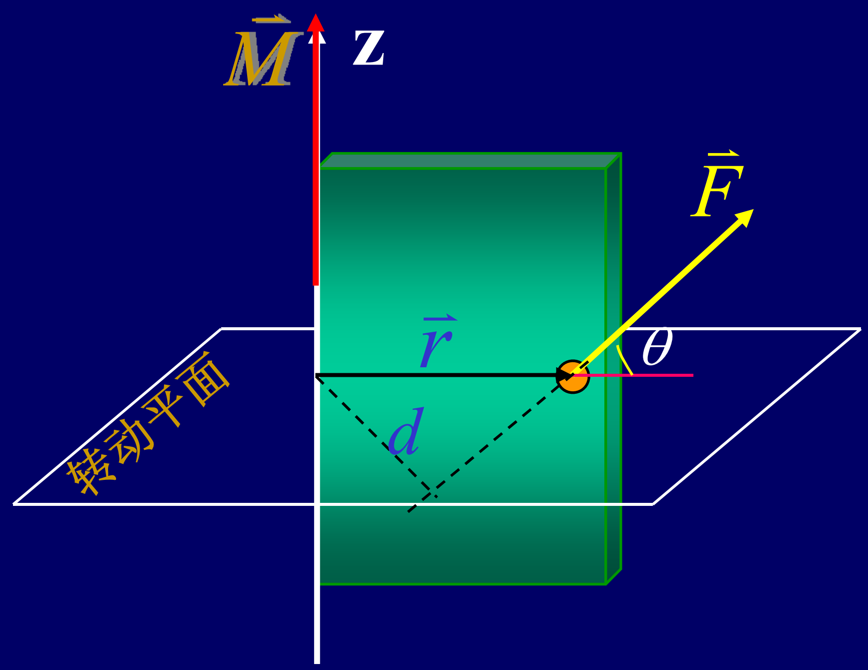
刚体作匀加速转动时，相应公式如下：

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \qquad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$$

§3.2　定轴转动定律

1、对转轴的力矩(moment)



力 $\vec{F}$ 对轴的力矩 $\vec{M}$ 定义为:

$$M = F \cdot d = rF\sin\theta$$

写成矢量式

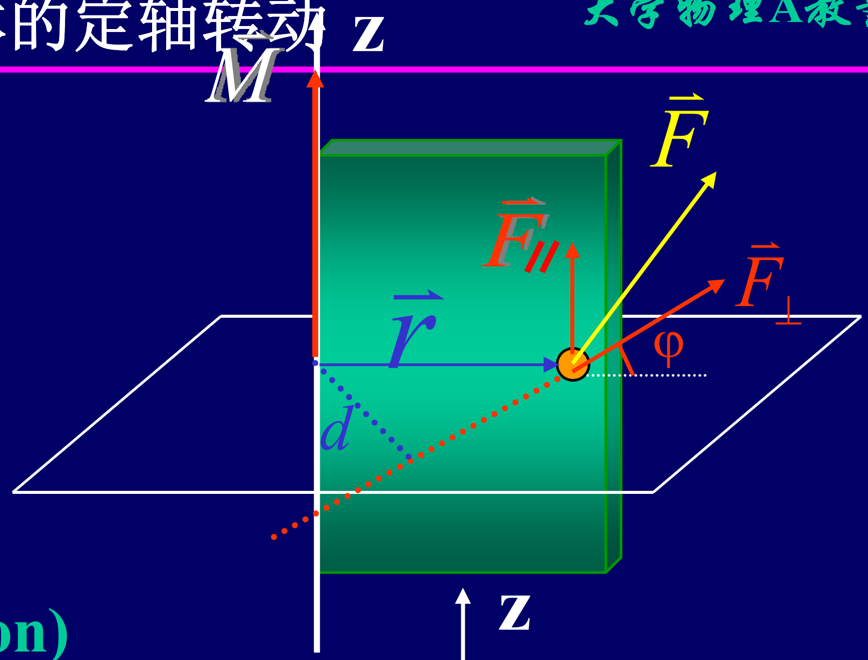
$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

单位：N·m

$\vec{M}$ 的大小：　$M = rF\sin\theta$

$\vec{M}$ 的方向垂直转动平面，即沿转轴方向。

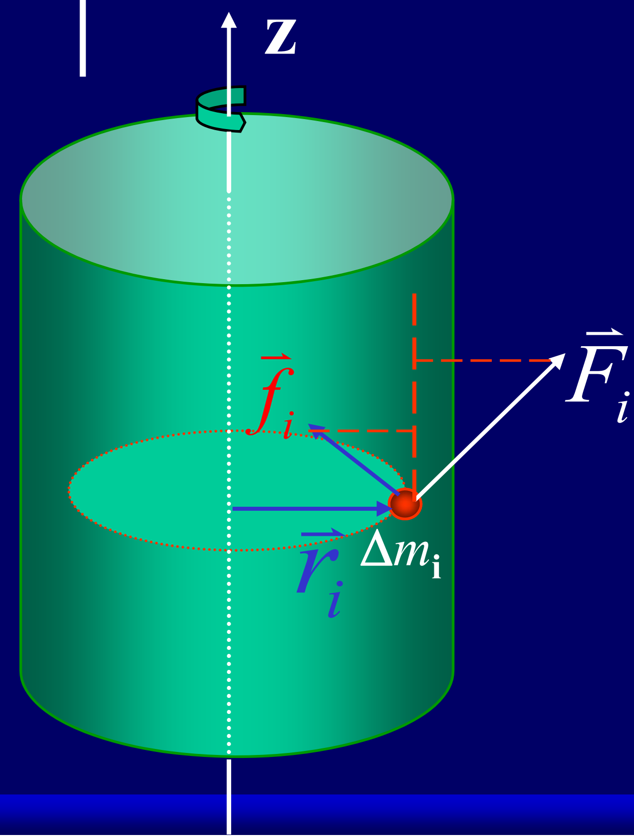
当外力 $\vec{F}$ 不在垂直于转轴的平面内时,



$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_{\perp}}$$

2、定轴转动定律(law of rotation)

刚体看作一个质点系,

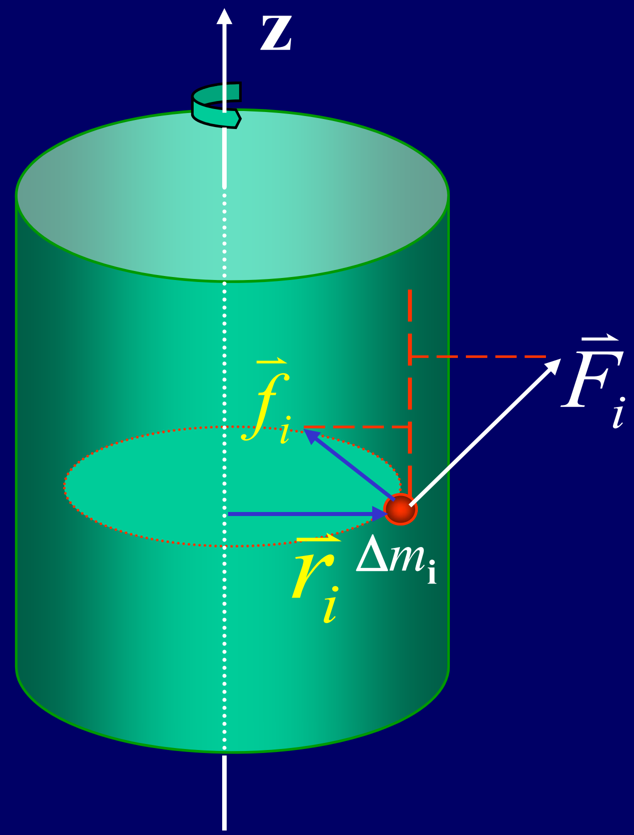


$$F_{i\tau} + f_{i\tau} = \Delta m_i a_\tau = \Delta m_i r_i \alpha$$

两边乘 r_i 并对 i 求和

$$\boxed{\sum r_i F_{i\tau} + \sum r_i f_{i\tau} = (\sum \Delta m_i r_i^2)\alpha}$$

$$\boxed{\sum r_i F_{i\tau} + \sum r_i f_{i\tau} = (\sum \Delta m_i r_i^2)\alpha}$$



$\boxed{\sum r_i f_{i\tau}}$ 为所有内力对转轴的力矩的代数和，即合内力矩。

$$\sum r_i f_{i\tau} = 0$$

$\boxed{\sum r_i F_{i\tau}}$ 为所有外力对转轴的力矩的代数和，即合外力矩，用 ***M*** 表示。

$\boxed{\sum \Delta m_i r_i^2}$ 称为刚体对定轴的<u>转动惯量</u>, 用 J 表示。

即: $\boxed{J = \sum \Delta m_i r_i^2}$ 转动惯量的定义式

$$\sum r_i F_{i\tau} + \sum r_i f_{i\tau} = (\sum \Delta m_i r_i^2)\alpha$$

$$\boxed{M = J\alpha = J\frac{d\omega}{dt}}$$

刚体定轴转动定律

刚体作定轴转动时，刚体的角加速度与它所受的合外力矩成正比，与刚体的转动惯量成反比。

3、转动惯量及其计算

转动惯量的定义

$$\boxed{J = \sum \Delta m_i r_i^2}$$

单位：**kg.m²**

转动惯量的定义

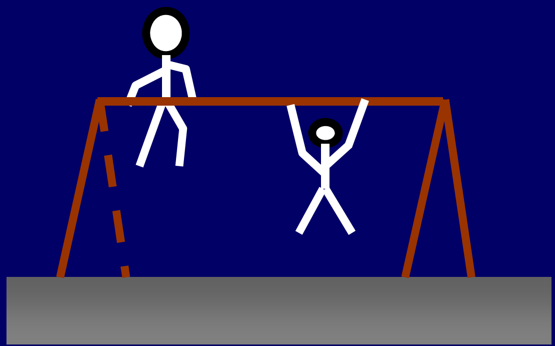
$$J=\sum \Delta m_i r_i^2$$

刚体转动惯量（J）的大小与下列因素有关：

(1) 与刚体的质量大小有关；(同分布$M>m$，$J_M>J_m$)

(2) 刚体质量一定时，与质量分布有关；(同m, $J_{中空}>J_{实}$)

(3) 与转轴的位置有关。



转动惯量仅取决于刚体本身的性质，即与刚体的质量、质量分布以及转轴的位置有关。

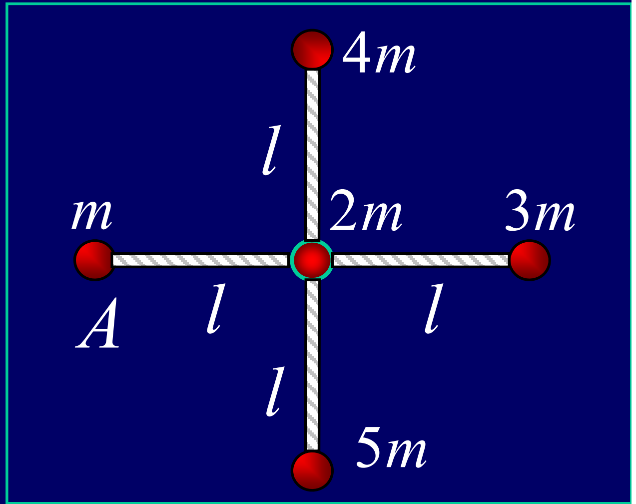
转动惯量的计算

（1）分立质点　$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots + m_i r_i^2$

例1. 由长l的轻杆连接的质点如图所示，求质点系对过A垂直于该平面的轴的转动惯量。

解：由定义式

$$J = \sum_i r_i^2 m_i$$



$$J = 2ml^2 + 3m(2l)^2 + (4m + 5m)(\sqrt{2}l)^2$$

$$= 32ml^2$$

思考：A点移至质量为$2m$ 的杆中心处 J = ？

(2) 质量连续分布的刚体

$$J=\int dJ=\int r^2 dm$$

例2. 计算长为L, 质量为m的均质细棒的转动惯量。（1）对通过棒的一端并与棒垂直的轴；（2）对通过棒的中心并与棒垂直的轴。

解: (1) 在x处取质量元

$$dm=\lambda\, dx=\frac{m}{L}dx$$

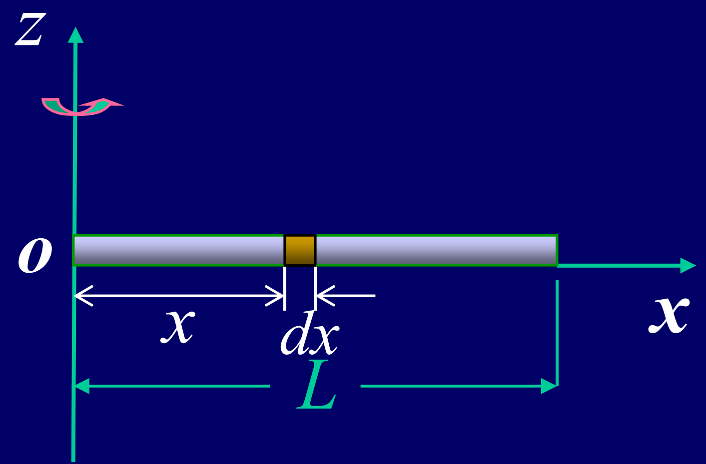
它对轴的转动惯量

$$dJ=x^2 dm$$

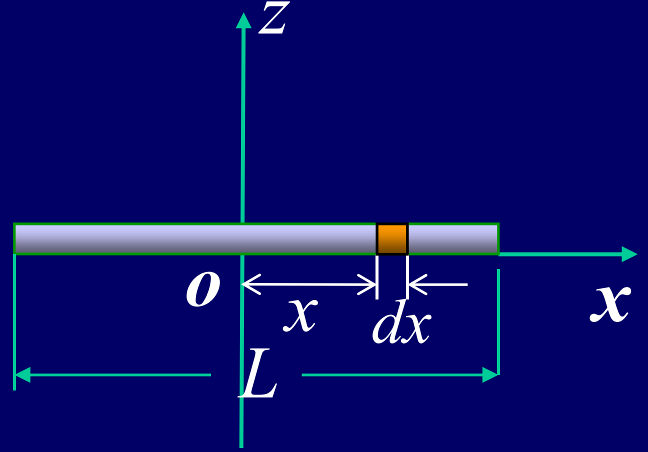
整条棒

$$J=\int dJ=\int_0^L x^2\cdot\frac{m}{L}dx=\frac{1}{3}mL^2$$

$$\boxed{J=\frac{1}{3}mL^2}$$



（2）同一棒绕过中心轴的转动惯量

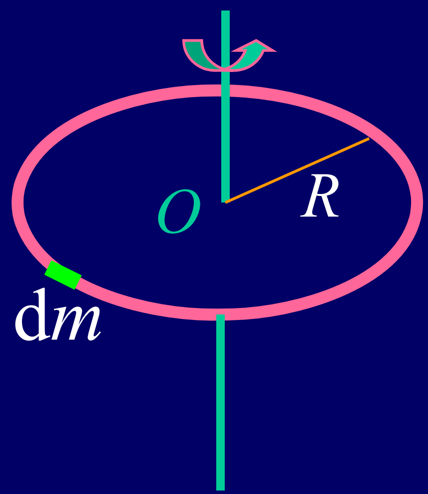


$$J=\int dJ=\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2\cdot\frac{m}{L}dx=\frac{1}{12}mL^2$$

$$\boxed{J=\frac{1}{12}mL^2}$$

例3. 求质量 m，半径 R 的圆环对中心垂直轴的转动惯量。

解： 在环上取质量元 dm

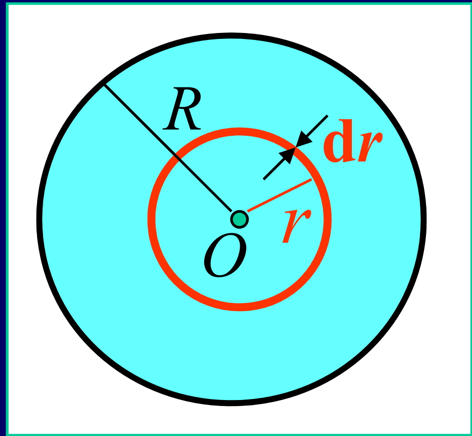


$$dm=\lambda dl=\frac{m}{2\pi R}dl$$

$$dJ=R^2dm=\frac{m}{2\pi}Rdl$$

$$J=\int dJ=\frac{mR}{2\pi}\int_0^{2\pi R}dl=mR^2$$

例4. 一质量为 m，半径为 R 的均质圆盘，求通过盘中心并与盘面垂直的轴的转动惯量。



解：　在 r 处取宽度为 dr 的细环

$$dm = \sigma 2\pi r dr = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr$$
$$= \frac{2m}{R^2} r dr$$

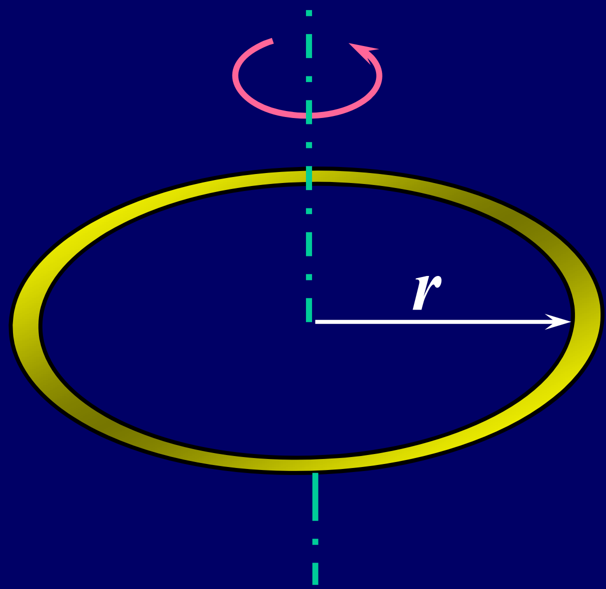
$$dJ = r^2 dm = \frac{2m}{R^2} r^3 dr$$

$$\therefore \quad J = \int dJ = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} m R^2$$

均质圆盘　$\boxed{J = \frac{1}{2} m R^2}$

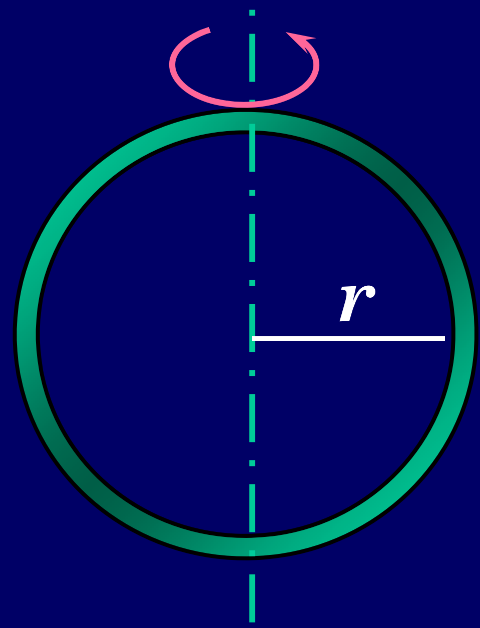
几何形状不规则的刚体的转动惯量，由实验测定。

几种常见刚体的转动惯量



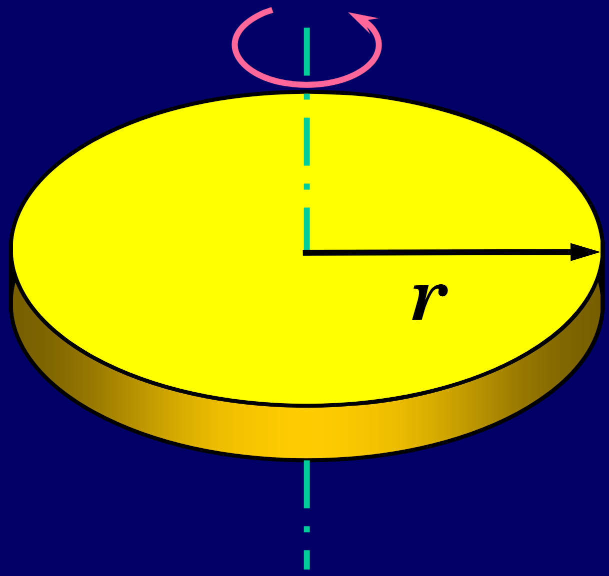
圆环：转轴通过中心与盘面垂直

$$J = mr^2$$



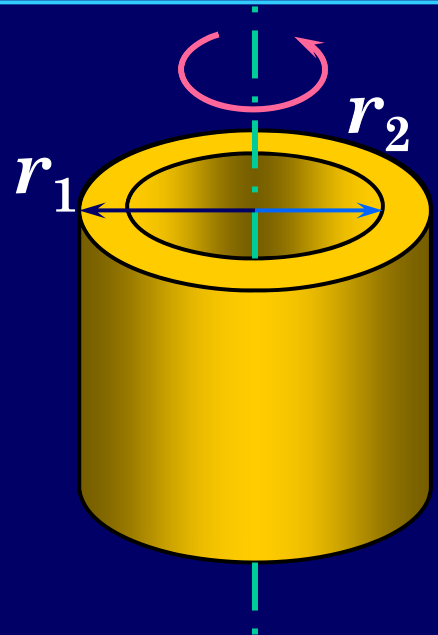
圆环：转轴沿直径

$$J = \frac{1}{2}mr^2$$



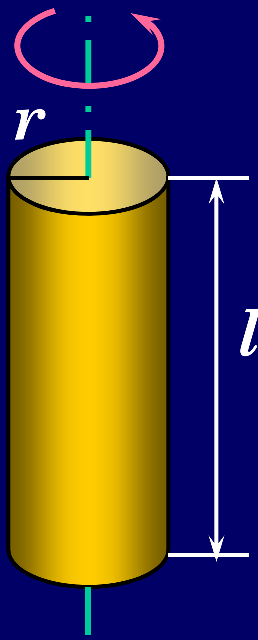
薄圆盘：转轴通过中心与盘面垂直

$$\boxed{J = \frac{1}{2} m r^2}$$



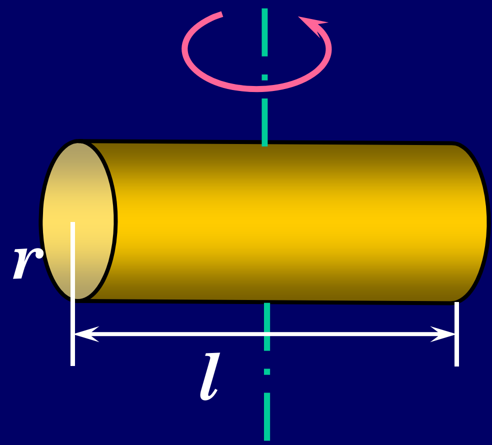
圆筒：转轴沿几何轴

$$J = \frac{1}{2} m (r_1^2 + r_2^2)$$



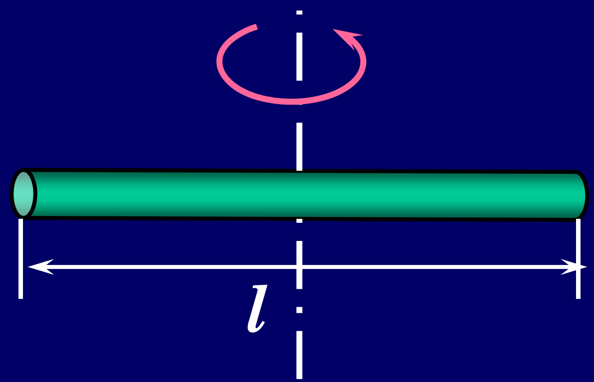
圆柱体：转轴沿几何轴

$$J = \frac{1}{2} m r^2$$



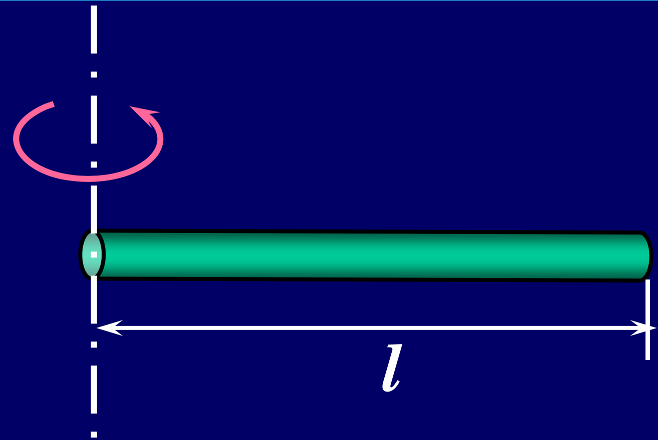
圆柱体：转轴通过中心与几何轴垂直

$$J = \frac{m r^2}{4} + \frac{m l^2}{12}$$



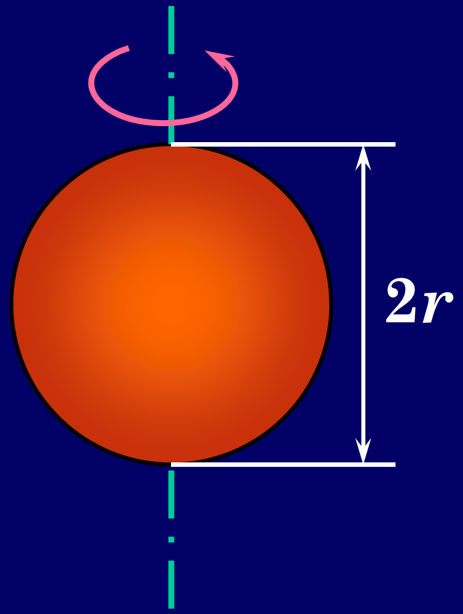
细棒：转轴通过中心与棒垂直

$$J=\frac{1}{12}ml^2$$



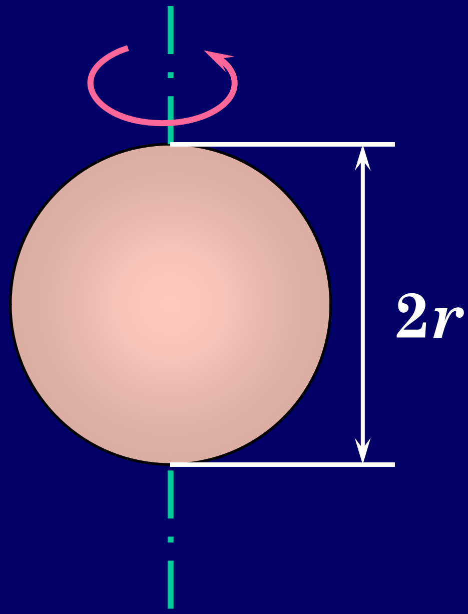
细棒：转轴通过端点与棒垂直

$$J=\frac{1}{3}ml^2$$



球体：转轴沿直径

$$J = \frac{2mr^2}{5}$$



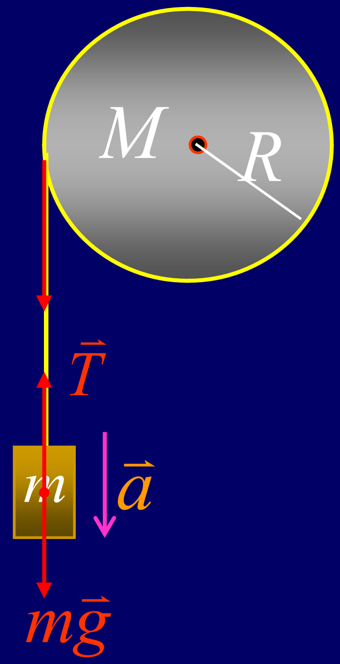
球壳：转轴沿直径

$$J = \frac{2mr^2}{3}$$

4、转动定律的应用

用转动定律解题的基本步骤与用牛顿第二定律解题的步骤相似。

例5、 质量 $M = 16\ \mathrm{kg}$、半径为 $R = 0.15\ \mathrm{m}$ 的实心滑轮，一根细绳绕在其上，绳端挂一质量为 m 的物体。求（1）由静止开始 1 秒钟后，物体下降的距离。（2）绳子的张力。



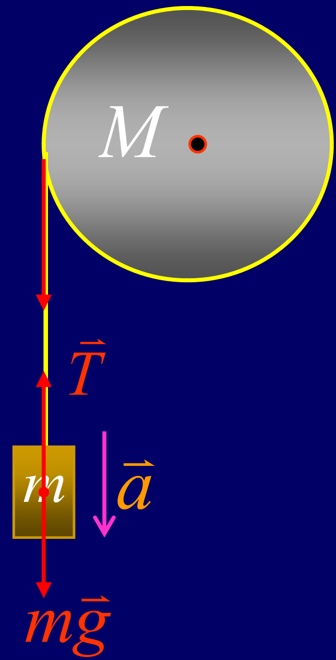
解： 隔离滑轮和重物，画它们的受力图，

对重物由牛二定律，对滑轮由转动定律列方程如下：

$$\begin{cases} mg - T = ma \\ T \cdot R = \dfrac{1}{2} MR^2 \cdot \alpha \\ a = R\alpha \end{cases}$$

注：滑轮受到转轴的支撑力和重力是一对平衡力，对定滑轮的运动不起作用，可以不画。

$$\begin{cases} mg - T = ma \\ T \cdot R = \dfrac{1}{2} MR^2 \cdot \alpha \\ a = R\alpha \end{cases}$$



解方程

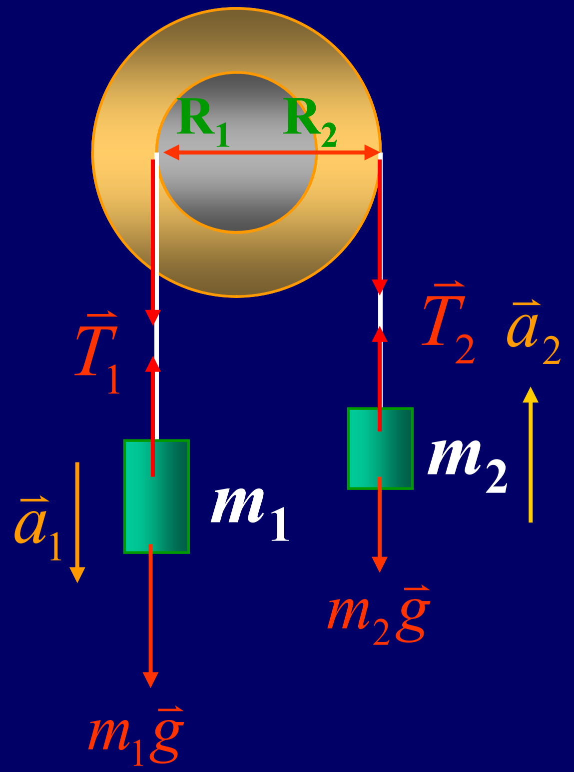
$$a = \frac{mg}{m + M/2} = \frac{8 \times 10}{8 + 8} = 5\ \mathrm{m.s^{-2}}$$

$$h = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \times 5 \times 1^2 = 2.5\ \mathrm{m}$$

$$T = \frac{1}{2} \times 16 \times 5 = 40\ \mathrm{N}$$

例6、质量为 m_1 和 m_2 的两物体，分别挂在两条绳上，绳绕在鼓轮上（如图所示）。已知鼓轮的转动惯量为J，求两物体的加速度。

解：分别隔离滑轮和重物，画出它们的受力图，如图所示



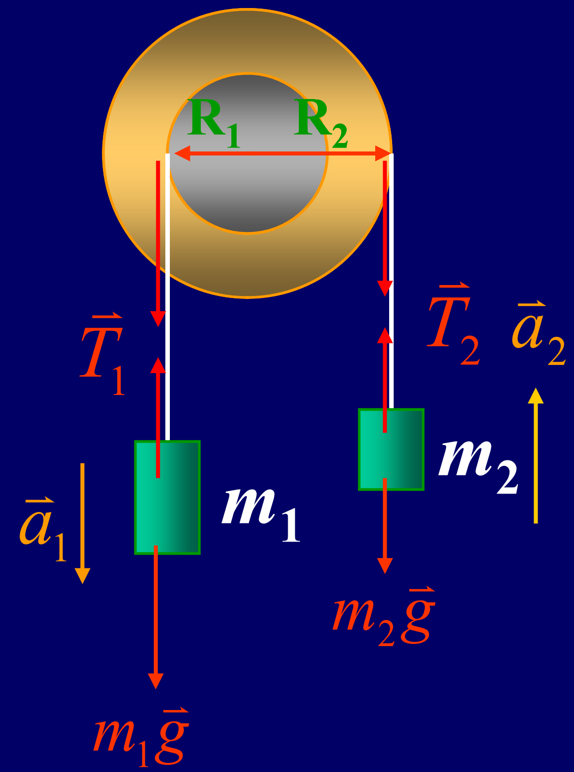
$$
\begin{cases}
m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \\
T_2 - m_2 g = m_2 a_2 \\
T_1 R_1 - T_2 R_2 = J\alpha \\
a_1 = R_1 \alpha \\
a_2 = R_2 \alpha
\end{cases}
$$

联立以上方程求得:

$$\alpha = \frac{m_1R_1 - m_2R_2}{m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + J}g$$

$$a_1 = \alpha R_1 = \frac{m_1R_1 - m_2R_2}{m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + J}gR_1$$

$$a_2 = \alpha R_2 = \frac{m_1R_1 - m_2R_2}{m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + J}gR_2$$

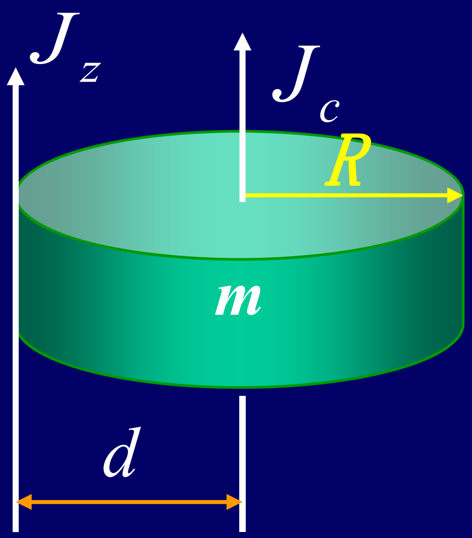


5、平行轴定理*

若刚体对过质心的轴的转动惯量为 J_c，则刚体对与该轴相距为 d 的平行轴 z的转动惯量 J_z为

$$\boxed{J_z = J_c + md^2}$$

称为平行轴定理



如图，若 $$J_c = \frac{1}{2}mR^2$$

则：$$J_z = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$