第12章

静电场中的导体

电介质

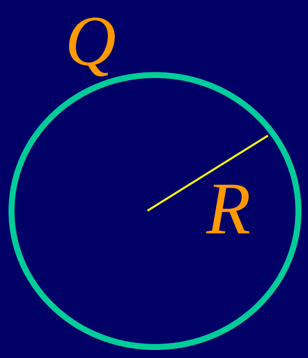
导体 电介质(3)

主要内容：

- 电容 电容器
- 电场的能量

§ 12. 3 电容 电容器

1. 孤立导体的电容



孤立导体球的电势 $U = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

R一定,$U \propto Q$, 但比值 $\dfrac{Q}{U}$ 与Q 无关

定义: $\boxed{C = \dfrac{Q}{U}}$ 为孤立导体的电容

真空中孤立导体球的电容: $C = \dfrac{Q}{U} = 4\pi\varepsilon_0 R$

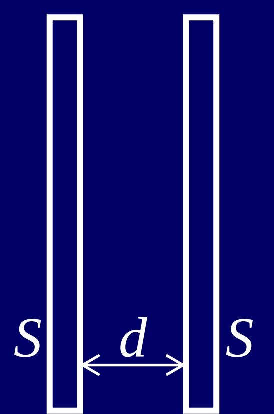
电容的单位 $\mathrm{C \cdot V^{-1}}$ 称为法拉 F

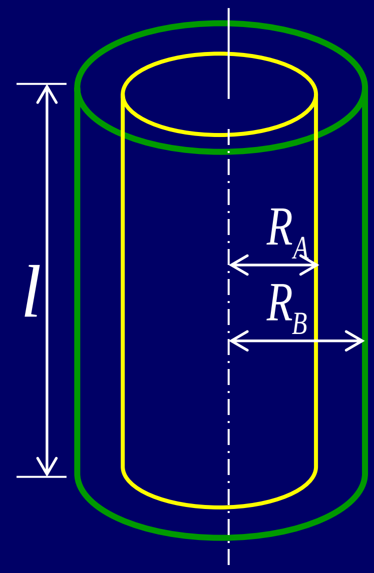
$$1F = 10^6 \mu F = 10^{12}\ PF$$

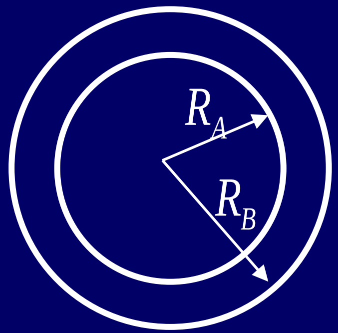
导体的电容是表征导体储存电荷能力的物理量，只与导体的形状、尺寸和周围电介质有关，与导体是否带电无关。

2. 电容器的电容

实际电容器由两相互靠近并绝缘的导体构成，两导体称为电容器的两极板. 电容器充电时，两极板上分别带上等量异号的电荷.







平行板电容器　　　　圆柱形电容器　　　　球形电容器

定义: 电容器的电容

$$C = \frac{q}{U_A - U_B} = \frac{q}{U_{AB}}$$

电容器的电容只与两导体的形状、尺寸、相对位置以及两极板间有无电介质有关，与电容器是否带电无关。

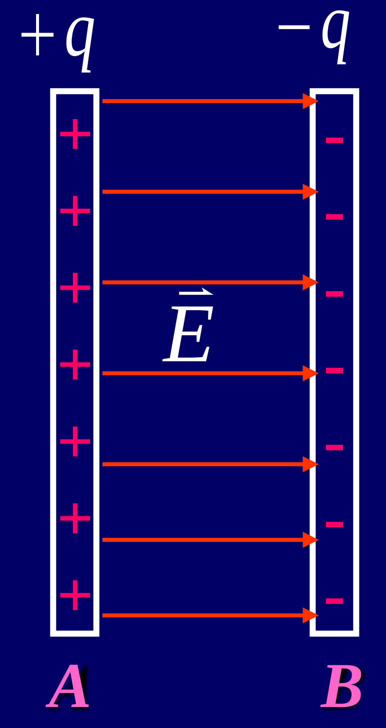
计算电容器电容的步骤:

（1）设电容器两极板分别带电 $+q$和 $-q$

（2）求极板间的场强分布

（3）求极板间的电势差 $U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$

（4）由电容器电容定义计算 C



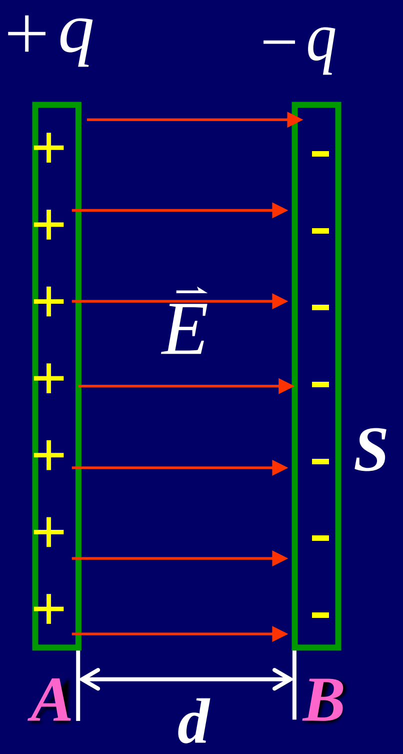
平行板电容器

设两极板分别带电 $+q$ 和 $-q$

两极板间的场强 $E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}=\dfrac{q}{\varepsilon_0 S}$

两极板间的电势差

$$U_{AB}=\int_0^d \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=Ed=\frac{qd}{\varepsilon_0 S}$$



电容器的电容

$$C=\frac{q}{U_{AB}}=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

两极板间充满均匀电介质后

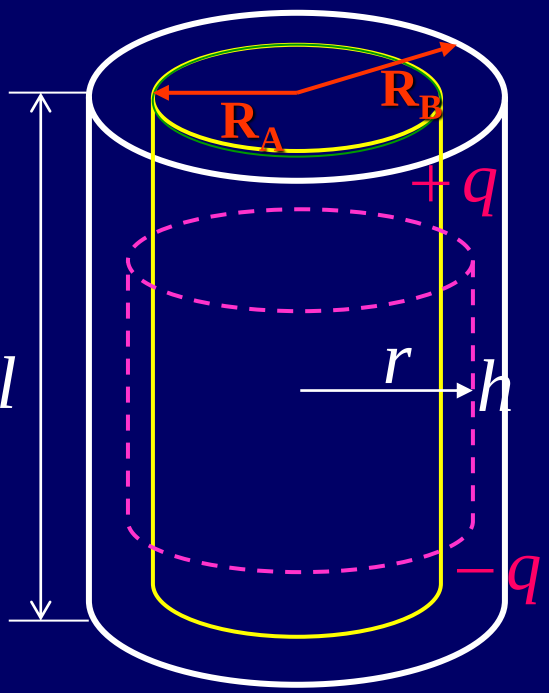
$$\boxed{C=\varepsilon_r C_0=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}}$$

C_0为真空时的电容

圆柱形电容器

半径为R_A和R_B，高为l 的两同轴圆柱面构成圆柱形电容器

设内外圆柱分别带电$+q$和$-q$



两圆柱面间的场强

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l r}$$

两圆柱面间的电势差

$$U_{AB}=\int_{R_A}^{R_B}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{R_A}^{R_B}\frac{q\mathrm{d}r}{2\pi\varepsilon_0 l r}$$

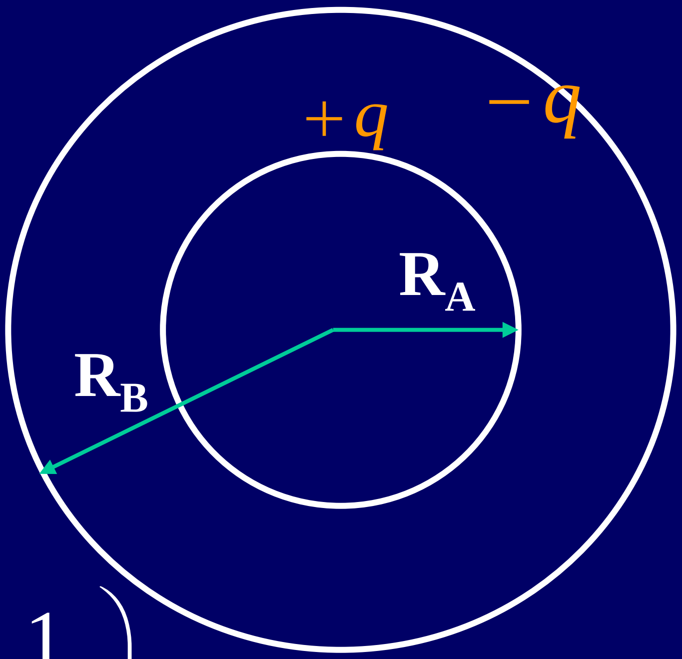
$$=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{R_B}{R_A}$$

电容器的电容

$$C=\frac{q}{U_{AB}}=\frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln R_B/R_A}$$

球形电容器

半径为R_A和R_B的两同心球面构成球形电容器



设内外球面分别带电$+q$和$-q$

两球面间的场强

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

两球面间的电势差

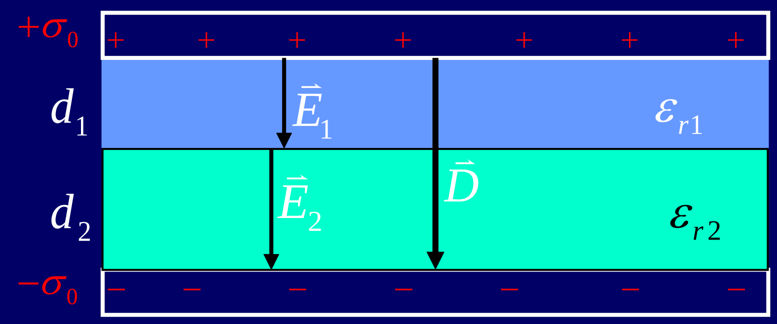
$$U_{AB}=\int_{R_A}^{R_B}\frac{q\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_A}-\frac{1}{R_B}\right)$$

电容器的电容

$$C=\frac{q}{U_{AB}}=4\pi\varepsilon_0\frac{R_A R_B}{R_B-R_A}$$

例1、 一平行板电容器，中间有两层厚度分别为 d_1 和 d_2 的电介质，它们的相对介电常数分别为 ε_{r1} 和 ε_{r2}，极板面积为 S，求电容。

解： 设电容器极板上自由电荷的面密度为 σ_0，由介质中的高斯定理得



$$D=\sigma_0$$

$$E_1=\frac{D}{\varepsilon_1}=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}} \qquad E_2=\frac{D}{\varepsilon_2}=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}$$

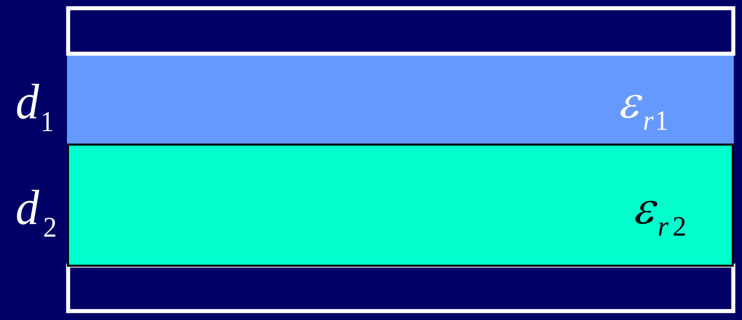
$$\Delta U=E_1d_1+E_2d_2=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}}+\frac{d_2}{\varepsilon_{r2}}\right)$$

$$C=\frac{q}{\Delta U}=\frac{\varepsilon_0 S}{\dfrac{d_1}{\varepsilon_{r1}}+\dfrac{d_2}{\varepsilon_{r2}}}$$

此电容器也可看成是两电容器的串联

$$C_1=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}S}{d_1}$$

$$C_2=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}S}{d_2}$$



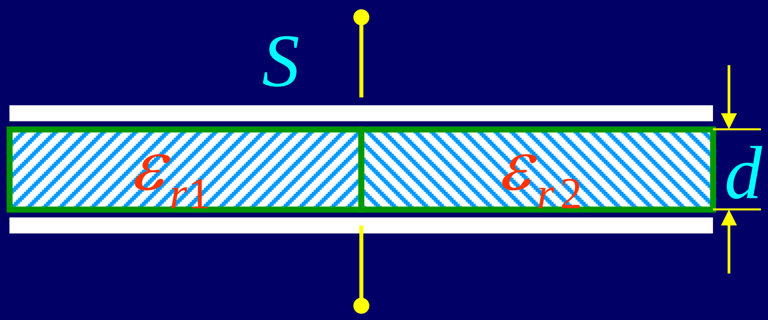
$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$$

$$C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=\frac{\varepsilon_0 S}{\dfrac{d_1}{\varepsilon_{r1}}+\dfrac{d_2}{\varepsilon_{r2}}}$$

例2、一平行板电容器充以两种不同的介质，每种介质各占一半体积，求其电容量。

解：

$$C_1=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}S}{2d}$$

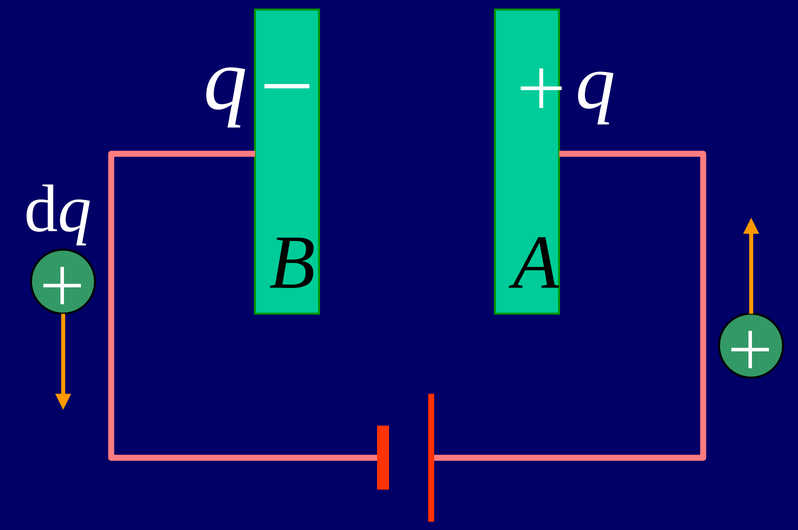


$$C_2=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}S}{2d}$$

$$C=C_1+C_2=\frac{\varepsilon_0 S}{2d}\left(\varepsilon_{r1}+\varepsilon_{r2}\right)$$

§12.4 电场的能量

1. 带电电容器的能量



电容器充电的过程是电源不断地把负电荷从*A*板移到*B*板的过程

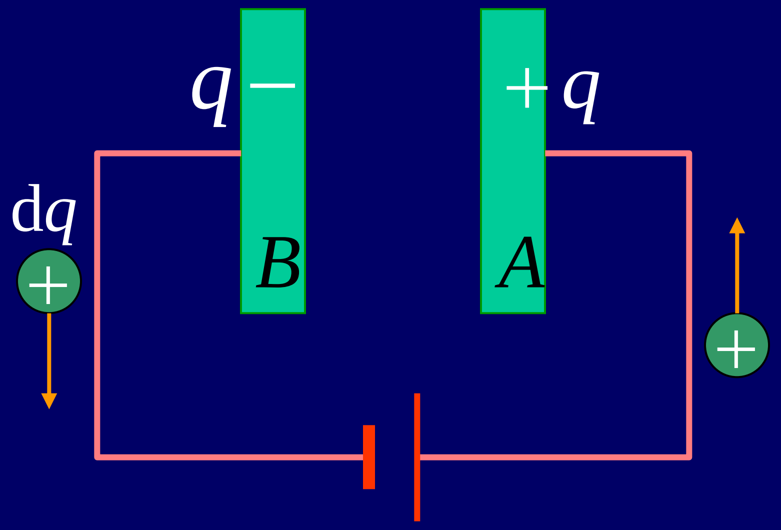
设充电过程中，两极板分别带电$+q$和$-q$, 电势差为u，电源继续把 dq 的电量从B移到A时，克服电场力做功

$$\mathrm{d}W = u\mathrm{d}q = \frac{q}{C}\mathrm{d}q$$

电容器从不带电到带电量*Q*，电源做的总功

$$W = \int \mathrm{d}W = \int_0^Q \frac{q}{C}\mathrm{d}q = \frac{Q^2}{2C}$$

$$W=\int \mathrm{d}W=\int_0^Q \frac{q}{C}\mathrm{d}q=\frac{Q^2}{2C}$$



电源的功转换为电场的能量，储存在两极板的电场中。

带电电容器的能量

$$\boxed{W_e=\frac{Q^2}{2C}=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}QU}$$

2. 电场能量　电场的能量密度

$$W_e = \frac{1}{2}CU^2$$

能量储存在电场中，可用场量表示

对平行板电容器

$$C = \frac{\varepsilon S}{d} \qquad U = Ed$$

$$W_e = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 Sd = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 V'$$

$V' = Sd$ 为电场的体积

电场的能量密度

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

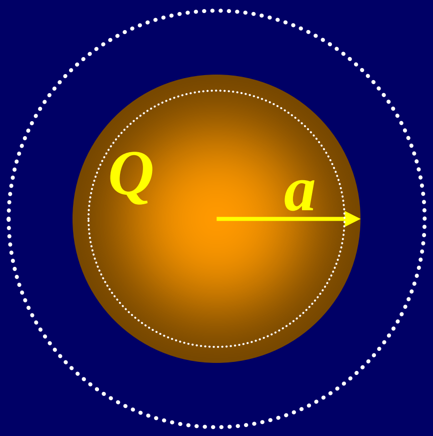
电场中单位体积的能量

电场的总能

$$W_e = \int_V w_e \mathrm{d}V$$

例3、 真空中一半径为 a 的球体，均匀带电 Q，计算其电场的能量。

解: 先由高斯定理求场强分布



$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i$$

$$E_{内}\cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\frac{4\pi r^3}{3}$$

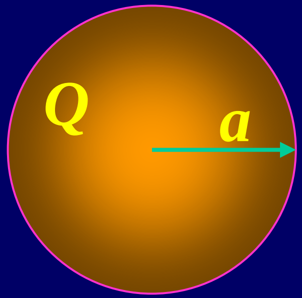
$$\rho = \frac{Q}{4\pi a^3/3}$$

$$E_{内} = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$$

$$E_{外} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

电场的能量密度 $w_e = \dfrac{1}{2}\varepsilon E^2$

在r处, 取厚度为dr的球壳, 其内电场能为



$$\mathrm{d}W_e = w_e \mathrm{d}V = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \cdot 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

电场的总能

$$W_\mathrm{e} = \int_V \mathrm{d}W_e$$

$$= \int_0^a \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_{内}{}^2\, 4\pi\, r^2 \mathrm{d}r + \int_a^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_{外}{}^2\, 4\pi\, r^2 \mathrm{d}r$$

$$= \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 a}$$

作业：

选10，填15，计21，22